Devoir n°2 : Algèbre-Analyse

Durée : *2 heures*

Les formulaires des fonctions trigonométriques et hyperboliques, ainsi que la table des développements de Mac-Laurin sont autorisés.

Analyse : (10 points)

Exercice n°1 *(4 points)*

Calculer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3x+2}-x\right)$

Exercice n°2 *(6 points)*

1. Écrire la formule de Taylor de la fonction f au point x_0 et à l'ordre n :
   (a) $f(x)=\sqrt{x}$; $x_0=1$; $n=3$
   (b) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x+1}$; $x_0=0$; $n=4$
2. On pose :
$$g(x)=\frac{1}{\cos x}-1-\frac{x^2}{2}$$
   Montrer que g est un infiniment petit au voisinage de 0. Préciser l'ordre et la partie principale.

Algèbre : (10 points)

Exercice n°1 *(5 points)*

Décomposer en éléments simples, d'abord dans $\mathbb{C}(X)$, puis dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :
$$R=\frac{2X+1}{(X^2+1)^2(X+1)^2} \quad ; \quad Q=\frac{1}{(X+3)(X^2+X+1)}$$

Exercice n°2 *(5 points)*

Soit m un paramètre réel et A_m la matrice définie par :
$$A_m=\begin{pmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de m, $\det(A_m)=0$?
2. On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme de matrice $A(2)$.
   (a) Déterminer le noyau de f.
   (b) Si $(x',y',z')\in \mathrm{Im}(f)$, montrer que $x'=z'-2y'$.
   (c) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.

aemn-emig.org