Algèbre : **T.D : série n°1**

Exercice n^o1

Décomposer les permutations suivantes en produit de transpositions et calculer dans chaque cas la signature :

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \; ; \; s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \; s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice n^o2

1. On pose $a_1 = 2$; $a_2 = -3$; $a_3 = -4$,Calculer le nombre suivant : $A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)} a_{\sigma(2)}$
2. On considère les permutations suivantes :

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \; ; \; s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer s_1^2 ; s_2^2 ; $s_1 s_2$; s_1^{-1} ; s_1^{-2}

Exercice n^o3

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$\left(\frac{iz-1}{2z+i}\right)^3 + 4\left(\frac{iz-1}{2z+i}\right)^2 + 4\left(\frac{iz-1}{2z+i}\right) + 1 = 0$$

2. Trouver le module est l'argument du nombre complexe : $\left(\frac{i\sqrt{3}+1}{1-i}\right)^{20}$

Exercice n^o4

1. Factoriser le polynôme : $P(X) = 3X^4 + 5X^3 - 5X^2 - 5X + 2$
2. Démontrer que l'élément $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ de $\mathbb{C}[X]$ est divisible par $X^2 - X + 1$.
3. Calculer le $PGDC$ et le $PPMC$ des éléments $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbb{R}[X]$ dans les cas suivants :
   (a) $P(X) = X^6 - 2X^5 + X^4 - X^2 + 2X - 1$ et $Q(X) = X^5 - 3X^3 + X^2 + 2X - 1$
   (b) $P(X) = X^4 - 2X^3 - 7X^2 + 5X - 4$ et $Q(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$

Exercice n^o5

1. Diviser $P(X)$ par $Q(X)$ suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n indiqué :
   (a) $P(X) = -X^2 + 2X + 3$ et $Q(X) = 2X^3 - X^2 + 2X - 1$; $n = 3$
   (b) $P(X) = 5X^3 - 2X^2 + X - 4$ et $Q(X) = X^2 - 2X - 5$; $n = 3$
   (c) $P(X) = 3X + 5 + i$ et $Q(X) = X^3 - 5X^2 + 4X + 1$; $n = 5$
2. Soit $P(X) = X^4 + 2X + 1$ de $\mathbb{C}[X]$, Déterminer les multiplicités des racines de i et $-i$.

aemn-emig.org

Exercice $n^o 6$

Soit la suite de polynômes P_n de $\mathbb{R}[X]$ définis par récurrence par :

$$P_1 = 1\ ; \quad P_2 = X\ ; \quad n \geq 2\ ;\ P_n = XP_{n-1} - P_{n-2}$$

1. Établir la relation $P_n^2 - P_{n-1}P_{n+1} = 1$
2. En déduire que P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Vérifier ce résultat sur P_3 et P_4 en leur appliquant l'algorithme d'Euclide.

Exercice $n^o 7$

Soit $P(X) = X^4 - 2X^3 - 7X^2 + 5X - 4$, en utilisant le schéma de Hörner :

1. Démontrer que les racines de $P(X)$ sont dans l'intervalle $]-3 \quad 4[$
2. Trouver les coefficient du polynôme $Q(X) = P(X-5)$

aemn-emig.org