LEX	DEVOIR $N°1$ DE MATHEMATIQUES
$2^{ème}$ semestre	CLASSE : T^{le} D
ANNEE : $2016-2017$	Durée : 4 heures

Exercice 1 : (4*points*)

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l' application S de P qui à tout point M d' affixe $z = x + iy$ associe le point M' d' affixe $z' = x' + iy'$ tel que
$$\begin{cases} x' = \dfrac{-1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 3 \\ \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1. Montrer que l' application S admet un unique point invariant Ω dont on déterminera l' affixe ω.
2. Donner l' écriture complexe de S.
3. ~~Exprimer $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$ et en déduire la nature et les éléments caractéristiques~~ de S.
4. Déterminer l' image par S de la droite $D : x + \sqrt{3}y - 6 = 0$

Exercice 2 : (4*points*)

Soit P un plan muni d' un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et les points $A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $A'\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$, $B'\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont orthogonaux.
   (b) Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{A'B'}\|$.
   (c) Montrer qu' il existe une similitude plane directe S_1 telle que l' on ait $A' = S_1(A)$ et $B' = S_1(B)$.
   (d) Préciser le rapport et un angle de S_1.
2. On considère une seconde similitude plane directe S_2 de centre O de rapport 3 et d' angle $\dfrac{\pi}{3}$; et une troisième similitude plane directe S_3 de centre $I\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, de rapport $\dfrac{1}{6}$ et d' angle $\dfrac{-5\pi}{6}$.
   Quelle est la nature de la transformation $S_3 \circ S_2 \circ S_1$?

Problème : (12*points*)

1. On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) & = & -x+2-\dfrac{2x}{1+x^2}, & si \ \ x \leq 1 \\ f(x) & = & (x-1)^2\ln(x-1), & si \ \ x > 1 \end{cases}$

   $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: unité $2cm$.

   (a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter graphiquement le résultat.

   (c) Déterminer l' ensemble de dérivabilité de f.

   (d) Etudier les variations de f.

   (e) i. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d' abscisse 0.

      ii. Montrer que A est un point d' inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

   (f) Montrer que la droite $\Delta : y = 2-x$ est asymptôte oblique à $\mathcal{C}$ en $-\infty$. Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ sur $]-\infty, 1]$.

   (g) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

   (h) Tracer $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Soit g la restriction de f à $]-\infty, 1]$ et $\mathcal{C}'$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   (a) Montrer que $\mathcal{C}'$ coupe la droite $D : y = x$ en un point d' abscisse $x_0 \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

   (b) Montrer que g est une bijection de $]-\infty, 1]$ vers un intervalle K à préciser.

   (c) Montrer que g^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(g^{-1})'(2)$.

   (d) Soit Γ la courbe de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

      i. Donner une équation de la tangente T à Γ au point d' abscisse 2. Construire Γ et T dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.