LEX	DEVOIR $N^o 2$ DE MATHEMATIQUES
Année: 2013 – 2014	Classe : $2^{nde}C$
1^{er} semestre	Durée : $2heures$

Exercice 1 $(2,5points)$

x et y sont deux nombres réels strictement positifs.
Démontrer les inégalités suivantes :

1. $$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$$

2. Si $x<y$ alors $x<\sqrt{xy}<y$

3. $$\frac{1}{x+y}<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

4. $\sqrt{x+y}<\sqrt{x}+\sqrt{y}$

5. $y-\sqrt{x^2+y^2}\leq x-y\leq y+\sqrt{x^2+y^2}$

Exercice 2 $(7,5points)$

1. Trouver les réels satisfaisant les conditions suivantes :
   a) $|x-5|=3$ et $|x-3|<5$
   b) $1<|3x-1|\leq 3$.

2. Montrer que si $|x|\leq 1$ alors $3\leq|2x-5|\leq 7$.

3. Soient x et y deux réels tels que :
   $-3\leq x\leq 3$ et $2\leq y\leq 3$.
   Donner un encadrement des quantités suivantes :
   $$xy;\frac{x}{y};x^2etx^2-y^2$$

4. Factoriser les expressions suivantes :
   $$A=x^2+6x+9$$
   $$B=4x^2-8x+4$$
   $$C=x^3-3x^2-x+3$$

Exercice 3 (6*points*)

1. Soient $ABCD$ un parallèlogramme .
   a) E et F sont les points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} et \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

   Démontrer que les points C , A et F sont alignés :

   - vectoriellement
   - analytiquement en rapportant le plan au repère (A, B, D).

   b) E et F sont les points définis par :

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} et \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

   Démontrer que les points B , C et F sont alignés .

2. Etant donné un triangle ABC et un point M du plan , on pose :

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{g(M)} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$$

   a) Exprimer $\overrightarrow{f(M)}$ en utilisant le barycentre G des points pondérés $(A, 1); (B, 2); (c, 3)$.
   b) Montrer que $\overrightarrow{g(M)}$ est un vecteur constant $\vec{v}$ non nul .
   c) Vérifier que C est un point M tel que

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{g(M)}$$

   d) Quel est l' ensemble des points M tels que

$$||\overrightarrow{f(M)}|| = ||\overrightarrow{g(M)}||$$

Exercice 4 (4*points*)

1. Dans le plan muni d' un repère orthonormé , on donne les points $A(2; 5)$, $B(-4; 5)$, $C(x; y)$ et leur isobarycentre $G(-1; 2)$.
   Déterminer les coordonnées de C .

2. Sur la droite de repère (O, I) , on donne les points A , B et G d' abscisses respectives -13 , 11 et 47.
   Déterminer le nombre réel α pour que G soit le barycentre de (A, α) et $(B, 6)$.