EXERCICES SUR LE CHAPITRE « CALCULS DANS IR en 2ndC »

Exercice 1

1) Donner un encadrement de $x + y$; $x - y$; xy et ; $\frac{x}{y}$ dans les cas suivants :

a) $4{,}5 \leq x \leq 4{,}6$ et $-2{,}9 \leq y \leq -2{,}8$ b) $-11{,}5 \leq x \leq -11{,}2$ et $5{,}1 \leq y \leq 5{,}2$

c) $-7 \leq x \leq 6{,}9$ et $-2{,}1 \leq y \leq -2$ d) $-2{,}7 \leq x \leq -2{,}59$ et $-5{,}1 \leq y \leq -5$

2) Soit a et b deux nombres réels vérifiant $b < a < b+1$ et $3 < b < 5$. Donner un encadrement de $a + b$ et $a - 2b$.

Exercice 2

Comparer les nombres E(x) + E(y) et E(x+y) dans les cas suivants :

1) x = 13,57 et y = 10,71 2) x = 7,2 et y = 3,3 3) x = -15,21 et y = 6,73

4) x = 28,431 et y = 7 5) x = -0,0047 et y = -0,0083 6) x = 3 et y = 12,441

Exercice 3

Enoncer les conditions que doivent vérifier les réels a, b et c pour que ces expressions aient un sens. Si cela est possible, les simplifier. $A = \sqrt{a^2b}$ $B = \sqrt{a^3b^2c}$ $C = \sqrt{12a^3b^2c^4}$ $D = \sqrt{9a^2b^5}$

$E = \sqrt{16a^2b^4c}$ $F = \frac{(a^2b)^{-3}c^5a^4}{a(bc^2)^2b^{-1}}$ $G = \left(\frac{a^2}{c}\right)^2 : \frac{\left[(a^7)^5b^{-2}(c^{-3})^{-2}\right]^{-1}}{[ab^2(c^{-2})^{-3}]^2}$ $H = \frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right) + \frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$

Exercice 4

Indiquer les conditions d'existence et, simplifier les expressions suivantes : $A = \frac{\frac{7}{x}-1}{1-\frac{x}{7}}$ $B = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$

$C = x + \frac{1}{x-\frac{1}{x}}$ $D = \frac{1}{2-\frac{1}{1-\frac{3}{x+1}}}$ $E = 2 - \frac{1}{3+\frac{x}{1-\frac{1}{2x+1}}}$ $F = 1 - \frac{\frac{4}{x}-\frac{8}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}}$ $G = \frac{x}{x-1} - \frac{x-3}{x+1} - \frac{8(2x+1)}{x^2-1}$

Exercice 5

Simplifier, si possible, les fonctions rationnelles f définies par :

1) $f(x) = \frac{6-2x}{x^2-6x+9}$ 2) $f(x) = \frac{x^2}{x^3+2x^2}$ 3) $f(x) = \frac{(2x-3)(x-1)^2-4(2x-3)}{(x+1)^2(x-3)}$

2) $f(x) = \frac{3-\frac{3x}{3-x}}{x+\frac{3x}{3-x}}$ 5) $f(x) = \frac{x+\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}-1} \times \frac{x^2-1}{x^2+1}$ 6) $f(x) = \frac{16}{12x-4} - \frac{15x+15}{(3x+1)^2} + \frac{9x}{9x^3-x}$

Exercice 6

Soit f(x) = x – E(x).

1) Calculer f(x) pour $x \in \{-5{,}31 ; -1{,}2 ; -0{,}001 ; 0{,}72 ; 1{,}7 ; 3{,}81\}$
2) Montrer que, pour tout x réel, f(x) est positif.
3) Soit $n \in$ IN. Calculer E(x+n) en fonction de n et de E(x).
4) Calculer f(x+n) et le comparer à f(n).

Exercice 7

Comparer les nombres suivants : 1) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ et $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ 2) $2 - 2\sqrt{7}$ et $2 - 3\sqrt{3}$

3) $14 - 6\sqrt{5}$ et $3 - \sqrt{5}$ 5) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ et $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ 5) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

Exercice 8

1) Comparer, puis ranger par ordre croissant (sans calculatrice) : $2 - \sqrt{3}$; $\sqrt{2} - 1$; $\sqrt{5} - 2$; $\frac{1+\sqrt{7}}{6}$; $\frac{1+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

2) Trouver un majorant et un minorant pour $\{3\sqrt{2} - 9;\ 12 + 4\sqrt{3};\ 7\sqrt{3} + 5\sqrt{2};\ 4\sqrt{5} + 20\}$

Exercice 9

Ecrire à l'aide des intervalles ensembles suivants : $A = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ 3|x-2| < \frac{1}{2}\right\}$,

$B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |2x-1| \leq 3\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |5x+14| > 2\}$ $D = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 2 \leq |x-3| \leq 5\}$

$E = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |2x-2| < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R} \ / \ |2x+3| > 6\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| < 5\} \cup \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x| > 3\}$

Exercice 10

Sachant que $x \in \left]\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right[$, encadrer les expressions suivantes :

1) $f(x) = x^2 + x + 3$ 2) $g(x) = -x^2 + x + 1$ 3) $h(x) = \frac{1}{2+x}$ 4) $k(x) = \frac{3}{1+x^2}$.

Exercice 11

Déterminer les ensembles $E \cap F$ et $E \cup F$ dans les cas suivants :

1) $E = \{x \in IR \,/\, |x-3| \leq 2\}$ et $F = \{x \in IR \,/\, |x-2| \leq 2\}$
2) $E = \{x \in IR \,/\, |x-2| < 0{,}5\}$ et $F = \{x \in IR \,/\, |2x-5| \leq 7\}$
3) $E = \{x \in IR \,/\, |x-2| < 3\}$ et $F = \{x \in IR \,/\, |2x+1| > 5\}$

Exercice 12

Compléter le tableau suivant :

Intervalles	Valeur absolue	Distance	Inégalités
$x \in [3 ; 7]$	$\lvert x-5 \rvert \leq 2$	$d(x, 5) \leq 2$	$3 \leq x \leq 7$
$x \in [2 ; 8]$	.....	d	$2 \leq x \leq 8$
	$\left\lvert x - \frac{3}{2} \right\rvert \leq \frac{5}{2}$	$d\left(x ; \frac{3}{2}\right) \leq \frac{5}{2}$	
	$\lvert x-4 \rvert \leq \frac{1}{2}$.	$d(x, 4) \leq \frac{1}{2}$	
$x \in \left[-\frac{7}{2} ; \frac{5}{3}\right]$			$-\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{5}{3}$

Exercice 13

Donner l'expression de f(x) sans le symbole valeur absolue dans les cas suivants :

1) $f(x) = \sqrt{(x+5)^2} - |x-5|$ 3) $f(x) = \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{x^2} - \sqrt{(2x-1)^2}$

2) $f(x) = 3x - 1 - \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$ 4) $(x) = |x+3| + |2+x| - 5x$

Exercice 14

On donne $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $g(x) = -x^2 + 4x + 5$.

1) Exprimer $x^2 + 2x$ en fonction de $(x+1)^2$. Montrer que l'ensemble des valeurs de f(x) est minoré.
2) Exprimer $x^2 - 4x$ en fonction de $(x-2)^2$. Montrer que l'ensemble des valeurs de g(x) est majoré.

Exercice 15

Soient a, b, c et d des réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

1) Montrer que, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors $\frac{b}{d} = \frac{11a-13b}{11c-13d}$ (lorsque $11c - 13d \neq 0$). Utilisez ce résultat pour trouver les nombres x et y vérifiant $\frac{x}{y} = \frac{7}{4}$ et $11x - 13y = 9$.
2) Montrer que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \left[\frac{ac}{bd} = \frac{(a+c)^2}{(b+d)^2}\right]$

Exercice 16

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1) Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$
2) Montrer que, si a < b alors, on a : $a < \sqrt{ab} < b$.

Exercice 17

Soit x et y sont deux nombres réels donnés.

1) Montrer que, si $x + y = 1$ alors $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$
2) Montrer que, si $x > 0$ et $y > 0$, alors $\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2xy}$ et $\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$
3) Montrer que, si $x > 0$ et $y > 0$, alors $\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Exercice 18

1) Soient x, y et z des nombres réels.
   a) Développer $(x + y + z)(xy + yz + zx)$, $(x + y + z)^2$ et $(x + y + z)^3$
   b) Démontrer que, si $x + y + z = 0$ alors $x^3 + y^3 + z^3 = 0$.
2) Soit x, y, z, t, quatre réels. Montrer que $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz + yt)^2 + (xt - yz)^2$

Exercice 19

Soient a, b, c et d des réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$ et $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Montrer que :

1) $\frac{a}{b} = \frac{a + c}{b + d}$ 2) $\frac{a + c}{b - c} = \frac{b + d}{b - d}$ 3) $\frac{-a + 2b}{3a + 5b} = \frac{-c + 2d}{3c + 5d}$

Exercice 20

On donne $1{,}732 < a < 1{,}733$ et $2{,}236 < b < 2{,}237$

1) Donner le meilleur encadrement possible de $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ et $\frac{2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{2}$
2) Comparer $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ et $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$. Comparer séparément ces deux nombres. Quelles observations faites – vous ?
3) Trouver les nombres entiers a et b tels que :
   a) $a \times 10^{-2} \leq \sqrt{15} \leq (a + 1) \times 10^{-2}$ b) $b \times 10^{-2} \leq \sqrt{\frac{5}{3}} \leq (b + 1) \times 10^{-2}$

Exercice 21

On rappelle que l'aire et le volume du pavé droit de côtés a, b, c sont respectivement $\mathcal{A} = 2(ab + ac + bc)$ et $\mathcal{V} = abc$. Encadrer avec le plus de précision possible, l'aire et le volume de ce pavé droit dans les cas suivants :

1) $9{,}9 < a < 10$ $5{,}6 < b < 5{,}7$ et $3{,}3 < c < 3{,}4$
2) 3,15 est une valeur approchée de a à 5.10^{-2} près ; 2,35 est une valeur approchée de a à 5.10^{-2} près et 4,25 est une valeur approchée de a à 5.10^{-2} près.

Exercice 22

On rappelle que l'aire et le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h sont respectivement $\mathcal{A} = 2\pi R(R + h)$ et $\mathcal{V} = \pi R^2 h$. On donne $3{,}141 < \pi < 3{,}142$. Encadrer avec le plus de précision possible, l'aire et le volume de ce cylindre dans les cas suivants :

1) $2{,}5 < R < 2{,}6$ et $6 < h < 6{,}1$
2) 4 est une valeur approchée de R à 2.10^{-2} près et 8 est une valeur approchée de h à 10^{-1} près.

Exercice 23

Une plaque métallique rectangulaire a pour dimensions en centimètres, $L \approx 4{,}5$ et $l \approx 2{,}3$; ces mesures ont été faites avec un instrument qui donne une précision de 0,01 cm.

1) Déterminez un encadrement de L, puis de l
2) Déduisez-en un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ de cette plaque.
3) Montrez que 10,35 est une approximation à 7.10^{-2} près de $\mathcal{A}$.

Exercice 24

1) Développer et réduire $(x^2 + 1)^2$, puis écrire $x^4 + 1$ sous forme d'un produit de deux facteurs de degré inférieur ou égal à 2
2) Soient les polynômes définis par $f(x) = x^6 - 1$ et $g(x) = x^8 - 1$. Ecrire f(x) et g(x) respectivement sous forme d'un produit de quatre facteurs et de cinq facteurs de degré inférieur ou égal à 2.
3) On donne $h(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Ecrire h(x) sous forme d'un produit de quatre facteurs de degré inférieur ou égal à 2
4) On suppose que $x \neq 1$. Développer le produit $(x - 1)h(x)$, puis écrire h(x) sous forme d'un quotient de deux fonctions polynômes. Utiliser cette relation pour calculer rapidement la somme : $S = 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1$. On donne $11^8 = 214\,358\,881$.