Devoir n°1 : Algèbre-Analyse

Durée : *2 heures*

Le formulaire des fonctions trigonométriques est autorisé.

Analyse : (10 points)

Exercice n°1 *(6 points)*

1. Étudier la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 4} \end{cases}$

2. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont :

$$U_n = \frac{n}{n^3+1} \quad ; \quad V_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

Exercice n°2 *(4 points)*

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs on pose $W_n = \dfrac{V_n}{1+V_n}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} V_n = 0$
2. En déduire que $\sum W_n$ et $\sum V_n$ sont de même nature.

Algèbre : (10 points)

Exercice n°1 *(6 points)*

Soit $P(X) = 2X^3 - (5+6i)X^2 + 3iX + 1$

1. Montrer que $P(X)$ admet une racine réelle x_0 et calculer par la méthode de Hörner le quotient de la division de $P(X)$ par $X - x_0$.
2. Par la méthode de Hörner calculer : $Q(X) = P(-X+i)$.

Exercice n°2 *(4 points)*

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ puis dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$R(X) = \frac{X+1}{X^3(X^2+1)^2}$$

www.aemn-emig.org