Devoir n°1 : Géométrie-Analyse

Durée :*3heures*

Le formulaire des fonctions trigonométriques est autorisé.

Exercice *n°1*(*4 points*)

Soit la série de terme général : $U_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \quad \forall n > 0$

1. Simplifier l'expression de U_n et calculer S_n
2. En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$

$0 < u_n < 1$

$0 < u_n^2 < u_n$

$0 < -u_n^2 < -u_n$

$0 < u_n - u_n^2 < 0$

$0 < u_{n+1} =$

Exercice *n°2*(*6 points*)

On considère la suite suivante :

$$\begin{cases} 0 < U_0 < 1 \\ U_{n+1} = U_n - U_n^2 \qquad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Quelle est sa limite ?
2. On pose $S_n = U_0^2 + U_1^2 + \cdots + U_n^2$
   (a) Simplifier l'expression de S_n est montrer que la série de terme général U_n^2 est convergente.
   (b) la série de terme général U_n est-elle convergente ?(*Justifiez votre réponse !*)
3. Montrer que : $\forall n \geq 0$; $0 < U_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ (*Pas d'idée ? Raisonnez par récurrence !*)
4. On pose $V_n = nU_n$
   (a) Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et converge vers une limite non nulle.
   (b) Retrouver le résultat de la question 2.*b* .

Exercice *n°3*(*4 points*)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Représenter les points : $A = (2, -1, 3)$; $P = (-1, 1, 0)$; $Q = (-2, -1, 2)$
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AQ}$ et en déduire l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}})$
3. Donner un vecteur unitaire orthogonal au plan dirigé par $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$
4. Calculer l'aire du triangle $A'P'Q'$ projection du triangle APQ dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

unité ? 5

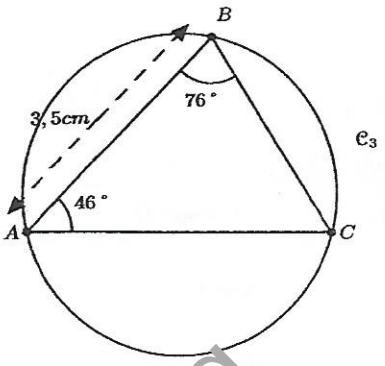
$W = \|V_1 \wedge V_2\|$

www.aemn-emig.org

Exercice $n^o 4$ *(6 points)*

Dans un triangle ABC d'angles aux sommets α, β, γ, on donne

$AB = c = 3,5\,cm$; $\alpha = 46^o$; $\beta = 76^o$



1. Construire le triangle ABC
2. On désigne par $\mathcal{C}_1$ le cercle passant par A et B et centré sur AC et par $\mathcal{C}_2$ le cercle passant par A et C et centré sur AB
   (a) Construire $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$
   (b) Déterminer graphiquement l'angle $(\widehat{AH, AB})$ ou H et le point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ distinct de A.
3. Vérifier graphiquement que le cercle $\mathcal{C}_3$, circonscrit au triangle ABC, est centrée sur AH.
4. vérifier graphiquement que :

$$(\widehat{AH, AB}) = \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{KH}, \overrightarrow{KB}})$$

Où K est le center de $\mathcal{C}_3$.

www.aemn-emig.org

$\vec{AP} = \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{vmatrix}$

$\vec{AQ} \begin{vmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$

$AQ = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$AP = \sqrt{22}$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

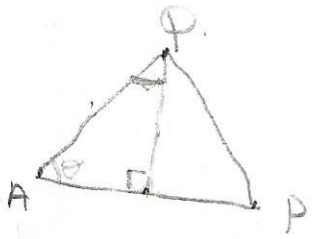
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= 1 - \frac{15}{\sqrt{22}\times\sqrt{17}}$

$\vec{AP} \wedge \vec{AQ} = \cancel{AP \times AQ \sin\theta}$

$\vec{AP}.\vec{AQ} = AP\,AQ\cos\theta$

$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{15}{\sqrt{22}}}$



$\cos\theta = \frac{15}{\sqrt{22}\times\sqrt{17}}$

$\cancel{\cos\theta} = \sin\theta = \frac{h}{AQ}$, $h = \sin\theta\, AQ$

$S = b \times h \times \frac{1}{2} = b \times AQ \sin\theta \times \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{22}}{2} \times \sqrt{17} \times \sin 39,1377$

$\frac{\sqrt{22}\times\sqrt{17}}{2} \times \sqrt{1 - \frac{15}{\sqrt{22}\sqrt{17}}}$

$S = \frac{22\times 17}{2} \times \sqrt{1 - \frac{15}{\sqrt{22}\times\sqrt{17}}}$