Année Scolaire 2011/2012

Première fiche de TD de maths

Exercice N°1.

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{x^3 + (y+1)^3}{x^2 + (y+1)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 + x^2 + y^2}{y} \sin y$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 + x + y}{x^2 - y^2}$$

Exercice N°2

a) Etudier la continuité au point $(0,0)$ de la fonction f définie par : $f(x,y) = \frac{1 - \cos\sqrt{xy}}{y}$ sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } xy > 0\}$, $f(0,0) = 0$

b.) Etudier la continuité en $(0,0)$ de la fonction $h(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $h(0,0) = 0$.

c) Idem pour la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4+y^2}}$$

$$f(0,0) = 0$$

Exercice N° 3.

a.) Calculer les d.p.p et étudier la différentiabilité des fonctions réelles suivantes :

i.) $f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{-xy}$.

ii.) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

iii) $h(x,y) = xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$

$$h(0,0) = 0$$

b.) On donne $g(x,y) = f(x^2-y^2\,;\,2xy)$.

Exprimer les d.p de g en fonction de celles de f.

Exercice N°4.

a) Soit la fonction $f : (x,y) \mapsto (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{xy}\right)$ si $(x,y) \neq (0,0)$

$f(0,0) = 0.$

f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

b) On donne $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto \frac{xy}{1+x^2+y^2}$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer les extremas de g.

Exercice N°5.

Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$f(x,y) = \sin(x^2-y^2).$

Soit g la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$g(x,y) = (x+y, x-y).$

1) Calculer les dérivées partielles de $f \circ g$ et la différentielle de $f \circ g$ au point (x,y).

2) Calculer les matrices jacobiennes de f et de g au point (x,y).

En appliquant le théorème sur la composition de deux fonctions différentiables, trouver la matrice jacobienne de $f \circ g$ au point (x,y) et retrouver ainsi le résultat du 1°).

Exercice n°6

a) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

Déterminer les extremas de f.

b) Chercher les points critiques de la fonction

$$f(x,y) = x\left((\ln x)^2 + y^2\right) \text{ pour } x > 0.$$

Décider s'il s'agit d'un minimum, maximum local ou d'un point selle.