LEX	DEVOIR $N°2$ DE MATHEMATIQUES
1^{er} semestre	CLASSE : T^{le} D
ANNEE : 2016 – 2017	**Durée :** 4 heures

Prof : ABDOU ISSA Adamou

Exercice 1 : ($5 points$)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

On note (C) la courbe de f.

1. Etudier les variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point $x_0 = 0$.
3. Montrer que l' équation $f(x) = x$ admet une solution α et une seule telle que $1 < \alpha < 2$.
4. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.
5. (a) Montrer que f admet une réciproque f^{-1}.
   (b) Déterminer le domaine de définition de f^{-1}.
   (c) Quel est le sens de variation de f^{-1} ?
   (d) Déterminer $f^{-1}(x)$.

Exercice 2 : ($5 points$)

Le plan est muni d' un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} & si\ x \in]-1, 1] \\ g(x) = 2 - x - \dfrac{1}{x} & si\ x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

1. Etudier la continuité de g au point 1.
2. Etudier la dérivabilité de g au point 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3. Etudier les variations de g.
4. Soit h la restriction de g à l' intervalle $[1, +\infty[$.
   (a) Montrer que h admet une réciproque h^{-1}.
   (b) Calculer $h^{-1}(x)$.

Exercice 3 : ($5points$)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - |x+3|}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l' équation $2x - |x+3| = 0$.
   En déduire l' ensemble de définition de f.
2. Exprimer, suivant les valeurs de x, $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
3. Déterminer les réels a, b, c, a', b' et c' tels que

$$\begin{cases} f(x) &= ax + b + \dfrac{c}{3x+3} \quad si \ x \ \in \ ]-\infty, -3] \\ \\ f(x) &= a'x + b' + \dfrac{c'}{x-3} \quad si \ x \ \in \ [-3, +\infty[\setminus \{3\} \end{cases}$$

4. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = -3$.
   Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
5. Etudier les variations de f.
6. Montrer que f réalise une bijection de $[7, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
7. Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Exercice 4 : ($5points$)

On donne la fonction g telle que :

$$g(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$$

1. Etudier la dérivabilité de g au point -1.
2. Etudier les variations de g.
3. Montrer que g est une bijection de l' intervalle $[-1, +\infty[$ sur un intervalle K que l' on précisera.
4. Soit g^{-1} la réciproque de g.
   (a) Expliciter $g^{-1}(x)$.
   (b) Calculer $(g^{-1})'(x)$ de deux façons différentes.