Lycée d'Excellence
B.P : 11 540 Niamey-Niger
Tél : (227) 20 31 62 97

Année Scolaire 2016-2017

$2^{ème}$ devoir du deuxième semestre
Epreuve de Mathématiques : $T^{le}C$
Durée : 4 heures

EXERCICE :1 (4,5 points)

Pendant l'année scolaire, la cantine scolaire d'un lycée propose souvent du riz. Le premier jour de l'année, il y a deux chances sur cinq qu'elle propose du riz. Si elle en propose un jour, il y a une chance sur trois qu'elle en propose le lendemain. Si elle n'en propose pas un jour, il y a une chance sur trois qu'elle n'en propose pas le lendemain. On appelle J_n l'événement : "la cantine propose du riz le $n^{ème}$ jour" et K_n l'événement : "la cantine n'en propose pas du riz le $n^{ème}$ jour". Soit P_n la probabilité de l'événement J_n.

1. Déterminer $P(J_2/J_1)$ et $P(J_2/K_1)$. En déduire P_2. (1,25 points)
2. Montrer que $P_n = \frac{-1}{3}P_{n-1} + \frac{2}{3}$. (0,75 point)
3. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $U_n = P_n - \frac{1}{2}$.
   a. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. (0,75 point)
   b. Calculer U_n puis P_n en fonction de n. (0,75 point)
   c. Un élève de l'établissement, fin mathématicien, ne mange à la cantine que les jours pairs. Montrer qu'à chaque fois qu'il se rend à la cantine, la probabilité qu'il a de manger du riz est comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{8}{15}$. (1 point)

EXERCICE :2 (6,5 points)

Soit le plan P muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points $A(1,0)$ et $B(-1,0)$. A tout point M du plan de coordonnées (x,y), on associe le nombre complexe $z = x+iy$, affixe de M.

1. Soit T l'application de P dans P qui à tout point M, associe le point M_1 d'affixe $z_1 = x_1 + iy_1$ telle que : $z_1 = iz - (i+1)$.
   a. Montrer que l'on a : $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM_1}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $||\overrightarrow{BM_1}|| = ||\overrightarrow{AM}||$. (0,5 point)
   b. Préciser la nature de T et ses éléments caractéristiques. (1,25 points)
   c. Calculer les coordonnées de M_1 en fonction de celles de M. (0,5 point)
   d. Quel est l'ensemble des points M_1 lorsque M décrit le cercle de diamètre $[AB]$? (0,5 point)
2. Le nombre réel λ étant fixé mais quelconque, on considère l'application T_λ de P dans P qui, à tout point M associe le point M', barycentre de M affecté du coefficient λ, de M_1 affecté du coefficient $-\lambda$ et de A affecté du coefficient 1. On note $z' = x' + iy'$ l'affixe du point M'.
   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de λ, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OA}$. En déduire que $z' = \lambda(1-i)z + \lambda(1+i) + 1$. (1 point)
   b. Démontrer que T_λ est une similitude plane directe et déterminer ses éléments caractéristiques. (1,25 points)
   Présicer pour quelles valeurs de λ l'application T_λ est une rotation et donner dans ces cas ses éléments géométriques (1,5 points).

EXERCICE 3 : (4,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère l'application f de P dans lui-même qui au point M de coordonnées (x,y) fait correspondre le point M' de coordonnées (x',y') définies par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x - 4y + 3) \\ \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y + 14) \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie, f est-elle un déplacement ou un antidéplacement ? (2 points)

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. (0,5 point)
3. Démontrer qu'il existe une droite (Δ) et un vecteur $\vec{u}$ de même direction que (Δ) tels que $f = S_\Delta \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ S_\Delta$, où S_Δ est la réflexion d'axe Δ et $T_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}$. Déterminer une équation de Δ et les coordonnées de $\vec{u}$. (2 points)

EXERCICE 4 : (4,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application f de P dans lui-même qui au point M de coordonnées (x, y) fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') définies par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x + 4y + 13) \\ y' = \frac{1}{5}(4x - 3y + 6) \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie, f est-elle un déplacement ou un antidéplacement ? (2 points)
2. Déterminer $f \circ f$. (0,5 point)
3. Déterminer le vecteur $\vec{v}$ et la droite (D) de vecteur directeur $\vec{v}$ tels que $f = s \circ t = t \circ s$, t étant la translation de vecteur $\vec{v}$ et s la réflexion d'axe (D). (2 points)