~~1~~ EX
Tle D

Année : 2016 - 2017
Durée : 4 heures
Second semestre

Devoir n°2 de Mathématiques

Exercice 1 :

Un groupe de 22 personnes d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi, 8 personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.
Le deuxième samedi, 4 personnes décident de revoir le film A, 2 vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne du groupe.
On considère, pour $k \in \{1, 2\}$, les évènements A_k « la personne a vu le film A le $k^{ième}$ samedi » et B_k « la personne a vu le film B le $k^{ième}$ samedi ».

1. a) Illustrer la situation par un arbre pondéré.
   b) Calculer $P(A_1)$, $P(A_2/A_1)$, $P(B_2/B_1)$ et $P(A_2)$.
2. Le prix du billet est de 300 F pour le film A et de 200 F pour le film B. On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, de deux séances de cinéma.
   Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 2 :

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n + 3}{u_n + 6} \end{cases}, n \geq 0$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser son premier terme et sa raison.

b) Quelle est la limite de (v_n) ?

3. Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de v_n. En déduire la limite de (u_n).

Problème.

A/ 1. On considère la fonction u définie par $u(x) = \sqrt{e^{x} - e^{2x}}$.

a) Déterminer le domaine de définition de u.

b) Montrer que pour tout réel $x < 0$, $\frac{u(x)}{x} = \sqrt{-\frac{e^x}{x} \times \frac{e^x - 1}{x}}$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{u(x)}{x}$.

2. Soit v la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $v(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}$.

a) Etudier les variations de v.

b) Dresser le tableau de variation de v.

~~c) En déduire le signe de v sur $]0, +\infty[$.~~

B/ On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x\ln(1 + \frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2 cm.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. a) Etudier la dérivabilité de f en 0 (on pourra utiliser le résultat de la ~~première~~ partie A.1.)

b) Interpréter graphiquement le résultat.

3. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation.

c) Construire (C).

4. a) Montrer que la restriction de f à $I = [-\ln 2 ; 0]$ réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que la bijection réciproque f^{-1} de f est définie pour tout réel x de J par $f^{-1}(x) = \ln\left[\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2}\right]$

c) Construire dans le repère précédent la courbe (Γ) de cette réciproque.

$$e^{x}\left(1-e^{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{\frac{1}{2}} \quad \left(1-e^{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$