Lycée d'Excellence
1èreD

Mercredi 31 mai 2017

Composition de Mathématiques de 2ème semestre (3h)

EXERCICE 1 *(4,5 points)*

Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x}$ et on note $(\mathcal{C})$ la courbe de g dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x)-1}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu. *(0,5 +0.5 point)*

   b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de g. *(0,5 point)*

2) Etudier les variations de g. *(2 points)*

3) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On calculera g(1), g(2), g(3) et g(4) *(1 point)*

EXERCICE 2 *(3,5 points)*

Un sac contient 5 jetons bleus, 3 jetons noirs et 2 jetons jaunes.

1) On extrait simultanément 3 jetons du sac. Déterminer le nombre de tirages contenant :
   a) trois jetons de même couleur *(0,75 point)*
   b) au moins un jeton noir. *(1 point)*

2) On tire successivement 3 jetons du sac sans remise. Déterminer le nombre de tirages tels que :
   a) les jetons sont de couleurs différentes *(0,75 point)*
   b) les jetons tirés ont la même couleur *(1 point)*

PROBLEME *(12 points)*

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \begin{cases} x - 1 + \frac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (on prendra pour unité : 1 cm)

1) Quel est l'ensemble de définition de f ? *(0,5 point)*

2) Déterminer l'ensemble de continuité de f. Justifier votre réponse *(1 point)*

3) Etudier la dérivabilité de f au point 1. En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux demi-tangentes dont on donnera leurs équations. *(2 points)*

4) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet trois asymptotes dont on donnera leurs équations. *(2 points)*

5) a) Etudier le sens de variations de f sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ *(1,75 points)*

   b) Etudier le sens de variations de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$ *(1,25 point)*

   c) Dresser le tableau de variations de f. *(0,5 point).*

6) Déterminer la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport aux asymptotes *(1 point)*

7) Tracer, avec soin, la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. *(1 point)*

8) Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1, +\infty[$. Montrer que h est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, 2[$. Expliciter la réciproque h^{-1}. *(1 point)*