

Devoir de Mathématiques (3h)

EXERCICE 1 (10 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 3x - c}$ où a , b et c sont des nombres réels.

- 1) Déterminer a , b et c pour que la courbe de la fonction f passe par les points $A(1; -2)$ et $B(3; 2)$ et admette pour asymptote, la droite d'équation $y = 1$. (1 point)
- 2) On considère maintenant la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3x + 3}$. On note (C) la courbe de f dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$
 - a) Etudier la parité de f . (0,5 point)
 - b) Etudier les variations de f . (3,5 points)
 - c) Etudier la position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote d'équation $y = 1$. (0,5 point)
 - d) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) de f avec les axes du repère. (0,75 point)
 - e) Tracer, avec soin, la courbe (C) de f . (1 point)
 - f) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre et le signe des solutions de l'équation $(m - 1)x^2 - 3mx + 3m + 3 = 0$. (1 point)
- 3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 3|x| + 3}$
 - a) Montrer que, pour tout réel x , $g(x) = f(|x|)$ (0,25 point)
 - b) Sans étudier les variations de la fonction g , tracer, avec une autre couleur, la courbe (C') de g dans le même repère que celui de la courbe (C) de f . Justifier votre réponse (1 point)
- 4) Déterminer la nature de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan (P) tels que $MA^2 + MB^2 = 25$ (0,5 point)

EXERCICE 2 (10 points)

Soit h la fonction définie par $h(x) = |x + 1| + \frac{1}{x - 1}$. On note (Γ) la courbe de h dans un plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . On prendra pour unité 1cm sur l'axe $(x'ox)$ et 2 cm sur l'axe $(y'oy)$.

- 1) Etudier la continuité de h au point -1 . Quel est l'ensemble de continuité de la fonction h ? Justifier votre réponse. (0,75+0,5 point)
- 2) a) Etudier la dérivabilité de h au point -1 . En déduire que la courbe (Γ) de h admet deux demi-tangentes dont on donnera leurs équations. (1,25+0,5 point)
b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de h . (0,5 point)
- 3) a) Montrer que la courbe (Γ) de h admet trois asymptotes dont on donnera leurs équations (2 points)
b) Déterminer la position de la courbe (Γ) par rapport à ses asymptotes. (0,5 point)
- 4) Etudier le sens de variations de h , puis dresser son tableau de variation. (2+0,25 points)
- 5) Tracer la courbe (Γ) de h . (1,25 point)
- 6) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 6$. (0,5 point)