LEX	COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
T^{le}D	1^{er} semestre
Année : 2017 – 2018	Durée : 4 heures

Exercice 1 : (5*points*)

Soit $P(z) = 3z^3 + (-5\sqrt{3} + 10i)z^2 + (5 - 15i\sqrt{3})z + 24i$

1. Démontrer que l' équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation $P(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres solutions, telles que $Re(z_1) > Re(z_2)$.

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B, C et D d' affixes respectives z_0, z_1, z_2 et $z_3 = \sqrt{3} - 5i$.

   (a) calculer les distances AB, AD et BD. En déduire la nature du triangle ABD.

   (b) Déterminer l' ensemble E des points M d' affixe z tels que $\mid z + 3i \mid = \mid z + i - \sqrt{3} \mid$.

   (c) Déterminer l' ensemble G des points M d' affixe z tels que $4 \mid z - \frac{2}{3}(\sqrt{3} + i) \mid = 1$.

4. Déterminer le complexe z_4, affixe du point F, tel que $\dfrac{z_1 - z_0}{z_4 - z_0} = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Quelle est la nature du triangle ABF.

Exercice 2 : (5*points*)

Un match de tennis se joue en deux sets gagnants. La probabilité pour que le joueur A gagne un set contre le joueur B est 0, 4.

1. Quelle est la probabilité pour que A gagne contre B :

   (a) en deux sets ?

   (b) en deux sets à un ?

   En déduire la probabilité pour que A gagne le match.

2. A et B disputent six matchs. Quelle est la probabilité pour que A gagne :

(a) exactement quatre matchs ?

(b) Au plus deux matchs ?

Problème : (10*points*)

Soit la fonction f définie par $f(x) = |x+1| + \dfrac{x}{x^2-1}$ et C la courbe de f dans le plan muni d' un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4. Montrer que les droites $(D_1) : y = -x - 1$ et $(D_2) : y = x + 1$ sont asymptôtes à la courbe C de f.
   $-\infty$ $+\infty$

5. Montrer que l' équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$.

6. Montrer que la restriction h de f à l' intervalle $]-\infty, -1[$ est une bijection de $]-\infty, -1[$ vers un intervalle J à préciser.

7. Donner l' équation de la tangente T_0 à la courbe C au point d' abscisse 0 et étudier la position relative de C et T_0 dans l' intervalle $]-1, 1[$.

8. Tracer C, T_0 et Γ la courbe de h dans le même repère.