**Lycée d'Excellence** **Lundi 4 juin 2018**
**2nd $C_1C_2$**

# Composition 2nd Semestre de Mathématiques (4h)

**EXERCICE 1 : (6,5 points)**

On considère les fonctions numériques de la variable réelle f, g, h, p, q définies respectivement par $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1}$; $g(x) = \frac{7}{|2x-4|-x+6}$, $h(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{2-x}}$, $p(x) = x\sqrt{2-|x|}$ et $q(x) = \frac{4}{x^4-9}$.

1) Simplifier la fraction rationnelle f *(1 point)*
2) Etudier la parité des fonctions p et q *(2x0,75 point)*
3) Donner l'expression de g(x) sans le symbole valeur absolue *(0,5 point)*
4) a) Déterminer l'ensemble de définition de g *(0,5 point)*
   b) Montrer que la fonction g n'est ni paire, ni impaire *(0,5 point)*
   c) Etudier, en utilisant la définition, le sens de variations de g sur chacun des intervalles $]-\infty\,;2[$ et $[2;\,+\infty[$ *(2x0,75point)*
5) Déterminer l'ensemble de définition de h. Peut-on écrire que $h(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{2-x}}$. Justifier votre réponse *(0,75+0,25 point)*

**EXERCICE 2 : (7,5 points)**

**A)** On considère deux points distincts A et B du plan affine $\mathcal{P}$. Soit h l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, qui à tout point M associe le point M' barycentre des points pondérés (A, 1) ; (B, 1) et (M ; 2).

1) Montrer que h est une homothétie dont on donnera le rapport *(1 point)*
2) Déterminer le centre de h *(0,5 point)*

**B)** On donne les points A(2 ; 3), B(−4 ; −1) et E(1 ; 1) dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Déterminer une équation de la droite $(\Delta)$ passant par E et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. En déduire les équations normales de $(\Delta)$. *(1,5 point)*
2) Soit un point quelconque M(x ; y).
   a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$. *(1 point)*
   b) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M(x, y) du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -9$. *(1point)*
3) Vérifier que le point E appartient à $(\mathcal{C})$, puis écrire une équation de la tangente (T) en E au cercle $(\mathcal{C})$. *(0,25+0,5 point)*
4) Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{AEB}$ *(0,75 point)*
5) Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection du cercle $(\mathcal{C})$ et de la droite $(\Delta)$ *(1 point)*

**EXERCICE 3 : (6 points)**

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$ et $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$. On note $(\mathcal{P})$ la courbe représentative de f et $(\mathcal{H})$ celle de g dans un plan muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (On prendra 1 cm pour unité).

1) Montrer que, pour tout réel x, on a $f(x) \leq \frac{5}{2}$. En déduire la nature de f(1). *(1 point)*
2) Etudier le sens de variations de f *(1 point)*
3) Déterminer une équation de $(\mathcal{H})$ dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $\Omega(2\,;\,1)$. *(1 point)*
4) Tracer, point par point, les courbes $(\mathcal{P})$ de f et $(\mathcal{H})$ de g avec des couleurs différentes *(1,5 pt)*
5) Résoudre graphiquement l'équation f(x) = g(x). *(0,5 point)*
6) Définir la fonction composée de f suivie de g, notée gof. *(1 point)*

***N.B :** on tiendra compte de la rédaction et de la clarté dans le raisonnement*