LEX	COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
T^{le}D	2^{nd} semestre
Année : 2017 – 2018	Durée : 4 heures

Exercice 1 : (5*points*)

$n \in \mathbb{N}$, on donne l' intégrale :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$$

1. Calculer I_1.
2. Démontrer que $\forall n > 0$:

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

3. Calculer alors les intégrales I_2 et I_3.
4. Utiliser les résultats précédents pour calculer :

$$I = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x)e^x dx$$

Exercice 2 : (5*points*)

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ 2u_{n+1} = 4u_n - 3 \quad si\, n \geq 0 \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On pose $v_n = u_n - \dfrac{3}{2}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.
3. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ et $S_n' = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
   Exprimer S_n', puis S_n en fonction de n.

Problème : (10points)

1. (a) On considère la fonction u définie par $u(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}}$.

   i. Déterminer le domaine de définition de u.

   ii. Montrer que pour tout réel $x < 0$, $\dfrac{u(x)}{x} = -\sqrt{-\dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{e^x - 1}{x}}$.

   iii. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{u(x)}{x}$.

   (b) Soit la fonction v définie sur $]0, +\infty[$ par $v(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$.

   i. Etudier les variations de v.

   ii. Dresser le tableau de variation de v.

   iii. En déduire le signe de v sur $]0, +\infty[$.

2. On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}} & si \quad x \leq 0 \\ \\ f(x) = x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) & si \quad x > 0 \end{cases}$

   On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormal, unité graphique : $2cm$.

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) i. Etudier la dérivabilité de f en 0.

   ii. Interpréter graphiquement le résultat.

   (c) i. Montrer que la droite $(D) : y = 1$ est asymptôte à (C) en $+\infty$.

   ii. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

   iii. Construire la courbe (C).

   (d) i. Montrer que la restriction de f à l' intervalle $I = [-\ln 2, 0]$ réalise une bijection de I sur un intervalle J que l' on précisera.

   ii. Montrer que la bijection réciproque f^{-1} de f est définie pour tout réel $x \in J$ par :

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2}\right)$$

   iii. Construire dans le même repère que (C), la courbe (Γ) de f^{-1}.

   (e) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < 1$ et $A(\alpha)$ l' aire en cm^2 délimitée par la courbe (C) et les droites d' équations $x = \alpha$, $x = 1$ et $y = 0$.
   En remarquant que $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$:

   i. Montrer en utilisant une intégration par parties que :

$$A(\alpha) = 2\left[1 - \alpha + \ln(\alpha + 1) - \alpha^2 \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

   ii. Calculer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers 0.