Devoir de Mathématiques (3h)

EXERCICE 1 *(5 points)*

1) a) Déterminer la mesure principale de l'angle orienté de mesure xdans chacun des cas suivants : $x = -\frac{43\pi}{5}$; $x = \frac{139\pi}{7}$; $x = -\frac{68\pi}{3}$; $x = -\frac{49\pi}{6}$ ***(4x0,5 points)***

b) En déduirele signe decosx et sinxsans les calculersix $= -\frac{43\pi}{5}$ et $x = \frac{139\pi}{7}$ ***(2x0,5pt)***

2) a) Sachant que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$, calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ ***(0,5+0,5 point)***

b) En déduire $\cos\left(\frac{447\pi}{8}\right)$; $\sin\left(-\frac{91\pi}{8}\right)$ ***(2x0,5point)***

EXERCICE 2 *(5 points)*

On considère le système (S) suivant : $\begin{cases} mx + 3y - 9 = 0 \\ 3x + my + m^2 = 0 \end{cases}$ où m est un paramètre réel.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, par la méthode de combinaisons linéaires, le système (S) pour m = −1.

En déduire les solutions dans $\mathbb{R}^2$du système $\begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{4-x}} + 3y^2 = 9 \\ \frac{3}{\sqrt{4-x}} - y^2 = -1 \end{cases}$ ***(1+1 point)***

2) Pour quelles valeurs de m, le système (S) admet-il un couple de solution unique ? ***(0,5 point)***

3) Résoudre le système (S) pour m=−3 et m=3 ***(2x0,75 point)***

4) Dans le cas où le système (S) admet un couple de solution unique, existe-t-il des réels m tels que le système (S) admette une solution du type (a, 2a) ? [On pourra développer le produit $(m + 3)(m^2 + 3m + 9)$] ***(1 point)***

EXERCICE 3 *(10 points)*

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ direct (unité = 4cm). On considère le cercle trigonométrique (C) de centre O et M le point de (C) tel que $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}) = x$ et $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

1) On donne M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5les points tels que $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM_1}) = -x$; $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM_2}) = \pi - x$; $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM_3}) = \pi + x$; $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM_4}) = \frac{\pi}{2} - x$; $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM_5}) = \frac{\pi}{2} + x$ 2,5

a) Placer sur le cercle (C) les points M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 ***(5x0,5 pt)***

b) Que peut-on dire des points M_1 et M ; M_2 et M ; M_3 et M ; M_4 et M ***(4x0,25 pt)***

2) On considère maintenantle point N tel que $(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{ON}) = \alpha$ avec $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ et $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$.

a) Calculer les coordonnées du point N ***(0,75 point)***

b) Montrer que le point N appartient à la droite (D) d'équation $4x + 3y = 0$ ***(0,5 point)***

3) Simplifier les expressions suivantes :

$A(x) = \cos(-x) + \sin(-x) - \cos(-x - 6\pi) + \sin(5\pi + x) + \cos(11\pi - x)$ ***(0,75 point)***

$B(x) = \sin x + \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(8\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)$ ***(0,75 pt)***

$C(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ***(0,75 point)***

$D(x) = \cos(-x) + \sin(\pi + x) + \cos(x - \pi) + \sin(x - 2\pi) + \cos(x + 5\pi)$ ***(0,75 point)***

$E(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(5\pi - x) + \sin^2(x + \pi) + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ ***(0,75 point)***

4) Calculer $A = \cos\frac{9\pi}{10} - \cos\frac{11\pi}{10} + \cos\frac{6\pi}{10} + \cos\frac{4\pi}{10}$ ***(0,5 point)***

5) Démontrer que, pour tout réel x, on a : $3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$ ***(1 point)***

N.B : on tiendra compte de la rédaction et de la clarté dans le raisonnement.