LEX	Devoir $n°2$ DE MATHEMATIQUES
$T^{le}D$	$2^{ème}$ semestre
Année : 2017 – 2018	Durée : 4 heures

Exercice 1 : ($5points$)

On lance deux dés non pipés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque lancer associe la valeur absolue de la différence des nombres obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Définir la fonction de répartition F de X et tracer sa courbe représentative.

3. Calculer l' espérance mathématique et l' écart type de X.

Exercice 2 : ($5points$)

Un groupe de vingt-deux personnes décide d' aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.
Le second samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu' elles n' ont pas vu la semaine précédente.
Après la seconde séance, on interroge au hasard une personne du groupe.
On considère les évènements suivants :
A_1 : la personne interrogée a vu le film A le premier samedi ;
A_2 : la personne interrogée a vu le film A le second samedi ;
B_1 : la personne interrogée a vu le film B le premier samedi ;
B_2 : la personne interrogée a vu le film B le second samedi ;

1. (a) Illustrer la situation par un arbre pondéré.

   (b) Calculer les probabilités $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_2/A_1)$, $P(A_2/B_1)$ et $P(A_1 \bigcap A_2)$.

2. Le prix du billet pour le film A est de 30F, et de 20F pour le film B.
   On appelle Y la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

(a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

(b) Déterminer l' espérance mathématique de la variable Y

Problème : (10*points*)

1. (a) Soit la fonction g définie par $g(x) = 1 + x + \ln x$.

   i. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

   ii. Montrer que l' équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0,27 < \alpha < 0,28$, en déduire le signe de $g(x)$ pour $x > 0$.

   (b) Soit la fonction h définie sur $]-\infty, 0[$ par $h(x) = (x+1)e^x - 1$.

   i. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

   ii. En déduire pour tout $x < 0$, le signe de $h(x)$.

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = xe^x - x & si \quad x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x \ln x}{x+1} & si \quad x > 0 \end{cases}$

   (a) i. Etudier la continuité de f en 0.

   ii. Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter les résultats.

   (b) i. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite $D : y = -x$ est asymptôte à la courbe C en $-\infty$.

   ii. Etudier la position relative de C et D pour $x < 0$.

   (c) i. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

   ii. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat.

   (d) i. Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et donner le sens de variation.

   ii. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire le sens de variation.

   (e) Dresser le tableau de variation de f.

   (f) i. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$.

   ii. Tracer la courbe C (Unité $2cm$).

   (g) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = 1 \Rightarrow e^{1+\frac{1}{x}} = x$.

3. Soit $m(x) = |x|^x$

   (a) Déterminer le domaine de m et calculer $m'(x)$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $1 - \ln|x| > 0$