Lycée d'Excellence
2ndC1C2

Vendredi 27 avril 2018

Devoir de Mathématiques (3h)

EXERCICE 1 *(8 points)*

Soit les points A(4, 6), B(2, 8), C(-2, 4), D(1, 1) et E(5, 2) dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'homothétie h définie analytiquement par $\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y' = -\frac{1}{2}y + 3 \end{cases}$ et t la translation t de vecteur $\vec{v}(-2\ ;\ 1)$. On note f = hot la composée de t suivie de h.

1) Déterminer les images des points A, B et C par h. *(1,5 point)*
2) Déterminer les antécédents des points D et E par h. *(1 point)*
3) Déterminer la droite (D) qui a pour image la droite (D') d'équation $2x - 3y + 1 = 0$. *(1 pt)*
4) Trouver les expressions analytiques de t, puis de f *(0,5+1,5 point)*
5) Montrer que le plan possède un point invariant par f *(1 point)*
6) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. *(1,5 point)*

EXERCICE 2 *(4 points)*

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit l'application s : $M(x, y) \mapsto M'(x', y')$ avec
$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{2}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{4}{5} \end{cases}$$

1) Montrer qu'il existe une droite (D) de points invariants par s. *(1,25 point)*
2) Montrer que, pour tout point M, le milieu de [MM'] appartient à la droite (D) *(1 point)*
3) Montrer que, pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à la droite (D) *(1 point)*
4) En conclusion, que peut –on dire de s ? *(0,75 point)*

EXERCICE 3 *(8 points)*

1) Donner la définition d'une homothétie et d'une rotation. *(1 point)*
2) Soit OAB un triangle isocèle en O tel que mes(OA, OB) = $\frac{\pi}{4}$.
   a) Déterminer les points $r_{O,\frac{\pi}{4}}(A)$ et $r_{O,-\frac{\pi}{4}}(B)$. Justifier votre réponse. *(1 point)*
   b) Construire $r_{O,-\frac{\pi}{4}}(A)$, $r_{O,\frac{\pi}{4}}(B)$, $r_{A,-\frac{3\pi}{8}}(B)$ et $r_{B,-\frac{3\pi}{8}}(A)$ *(2 points)*
3) Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et f la transformation du plan qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. On note M(x, y) dont l'image par f est le point M'(x', y').
   a) Calculer x' et y' en fonction de x et y. *(1,5 point)*
   b) Montrer qu'il existe un point Ω invariant par f. *(1 point)*
   c) Calculer le vecteur $\overrightarrow{\Omega M'}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f. *(1+0,5 point)*

$A\binom{-2}{4}$; $B\binom{-1}{6}$; $C\binom{4}{-2}$

***N.B :** on tiendra compte de la rédaction et de la clarté dans le raisonnement.*