LYCEE D'EXCELLENCE	Année Scolaire: 2017-2018	Composition de Mathématiques
	PREMIER SEMESTRE	Classe: Terminale C
	Samedi 27 Janvier 2018	Durée : 4 Heures

Exercice 1 : 4 pts

Dans le plan P, on considère un triangle ABC isocèle de sommet A tel que AB=AC=3a et BC=2a (a est un réel strictement positif).

On appelle G le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, 3 et 3. Soit I le milieu de [BC], J le milieu de [AI].

1. Montrer que G est le milieu de [IJ]. 1 pt
2. M étant un point de P, calculer $2MA^2+3MB^2+3MC^2$ en fonction de MG et de a. 2 pts
3. Déterminer l'ensemble E_1 des points M de P tels que $2MA^2+3MB^2+3MC^2=18a^2$. 0,5 pt
4. Déterminer l'ensemble E_2 des points M de P tels que $2MA^2+3MB^2+3MC^2=22a^2$. 0,5 pt

Exercice 2 : 4 pts

On considère la suite (un) définie par : $U_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \frac{1+3U_n}{3+U_n}$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :. $U_n > 1$ 1 pt

2. a) Etablir que, pour tout entier naturel n, on a : . $U_{n+1} - U_n = \frac{(1-U_n)(1+U_n)}{3+U_n}$ 1 pt

b) Déterminer le sens de variation de la suite (U_n). 1 pt

En déduire que la suite (U_n) converge vers un réel l.

c) Déterminer cette limite l. 1 pt .

f(l) = l

Problème :

Partie A.

1. Résoudre dans IR, l'inéquation $e^x - e^{2x} \geq 0$ 0,5 pt
2. On considère la fonction u définie sur $]-\infty\,;0[$ par $u(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}}$
   a. Montrer que pour tout réel $x < 0$, $\frac{u(x)}{x} = -\sqrt{-\frac{e^x}{x} \times \frac{e^x - 1}{x}}$ 0,75 pt
   b. Calculer $\lim_{x \to 0^-} \frac{u(x)}{x}$ 0,75 pt
3. Soit v la fonction définie sur $]0\,; +\infty[$ par $v(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$
   a. Etudier les variations de v. v' (0,50 pt) , signe v' (0,25 pt), sens de variation (0,25 pt)
   b. Dresser son tableau de variations. 1 pt
   c. En déduire le signe de v sur $]0\,; +\infty[$. 0,5 pt

Partie B.

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}} \; si \; x \leq 0 \\ f(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) si \; x > 0 \end{cases}$

Et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ unité graphique 2cm.

1. Montrer que f est continue sur IR. 0,5 pt
2. a. Etudier la dérivabilité de f en 0 (on pourra utiliser le résultat de la partie A.2.) 0,5 pt par lim : 1 pt

   b. Interpréter graphiquement le résultat. 0,75 pt
3. a. Montrer que la droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$. 0,75 pt

   b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. 1,5 pts

   c. Construire (C). 1 pt
4. a. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $I = [-\ln 2\,;0]$ réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera. 0,5 pt

   b. Montrer que la bijection réciproque f^{-1} de f est définie pour tout réel x de J par $f^{-1}(x) = \ln\left[\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2}\right]$ 1 pt

   c. Construire dans le repère précédent la courbe représentative (γ) de cette réciproque. 0,5 pt