Lycée d'Excellence

Devoir N°1 du 2nd semestre

Classe : TC **Durée** 4h

Exercice N°1 (5pts)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. On considère l'application affine f de P dans P qui associe à tout point M(x ; y) le point M'(x' ; y') défini par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble (E) des points invariants par f.
2. Montrer que si M n'est pas invariant, la droite (MM') garde une direction dépendante de M que l'on précisera.
3. Calculer les coordonnées du point M_1, intersection de (MM') et (E).
4. Donner la nature de f.

Exercice N°2 (5pts)

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. Soit (C) la courbe d'équation :

$$x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0.$$

1. a. Démontrer que (C) est une conique dont on précisera la nature, les éléments caractéristiques : centre, foyer et directrices.
   b. Tracer (C).
2. Soit (D) la droite d'équation $y - 3 = 0$. On désigne par $d(M, D)$ la distance d'un point M à la droite (D). Soit $E(-4\ ;\ 6)$; $d(M, E)$ désigne la distance de M à E. Quel est l'ensemble des points M du plan P tels que $d(M, E) = 2.d(M, D)$?

Exercice N°3 (10pts)

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$. Soit (D) la droite d'équation $x = 6$ et F le point de coordonnées (8 ; 0). Soit $\theta \in IR$ tel que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

On désigne par Γ_θ l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{cos\theta}$, où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

1. Préciser la nature de Γ_θ suivant les valeurs de θ.
2. Construire la courbe Γ_0 correspondant à θ=0.
3. a. Ecrire une équation cartésienne de la courbe $\Gamma_{\frac{\pi}{6}}$.

   b. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (foyer, sommet, éléments de symétrie, asymptotes).

   c. Construire la courbe $\Gamma_{\frac{\pi}{6}}$
4. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 10.
   a. Ecrire une équation cartésienne de la courbe de E transformée (image) de (C) par l'affinité orthogonale ayant pour axe la droite d'équation $y = 0$ et de rapport $\frac{3}{5}$. NB : appliquer la formule seulement.
   b. Préciser le foyer de E. En déduire les tangentes à $\Gamma_{\frac{\pi}{6}}$ et à E au point d'intersection de ces courbes.