Lycée d'Excellence

Devoir N°2 du 2nd semestre

Mathématiques

Classe : TC **Durée** 4h

Exercice 1 (7pts)

On considère l'application f du plan dans lui-même, qui, au point M(x ; y) associe le point M(x' ; y') tel que $\begin{cases} x' = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \\ y' = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$

1. Comparer, pour M et P, deux points quelconques du plan, MP et M'P'. Que peut-on en déduire pur f ?
2. Soit $\vec{u} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath}$ un vecteur du plan, $\varphi(\vec{u}) = X'\vec{\imath} + Y'\vec{\jmath}$ son image par l'endomorphisme φ associé à f. Exprimer X' et Y' en fonction de X et Y.
3. Déterminer le déterminant du couple $(\varphi(\vec{\imath}); \varphi(\vec{\jmath}))$ dans la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Que peut-on en déduire pour f ?
4. Déterminer par son cosinus et son sinus $\theta = (\vec{\imath}; \varphi(\vec{\imath}))$.
5. Déterminer en résolvant un système linéaire, le centre de f.

Exercice 2 (6pts)

On considère l'application f du plan dans lui-même, qui, au point M(x ; y) associe le point M(x' ; y') tel que $\begin{cases} x' = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y \\ y' = \frac{12}{5} - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \end{cases}$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Soit φ l'endomorphisme associé à f. Déterminer $\varphi(\vec{u})$lorsque $\vec{u} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath}$. En particulier, calculer le déterminant du couple $(\varphi(\vec{\imath}); \varphi(\vec{\jmath}))$. f est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?
3. Déterminant l'ensemble des points invariants par f. En déduire que f est une réflexion d'axe à préciser.
4. Soit (D) la droite d'équation $2x + 3y - 5 = 0$. Déterminer son image par f.

Exercice 3 (7pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. Soit A(1 ; 2), B(-5 ; 10), A'(2 ; 7) et B'(10 ; 1) quatre points du plan.

1. Montrer l'égalité A'B'=AB.
2. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})$.
3. Soit fl'unique déplacement tel que f(A)=A' et f(B)=B'. On note φ l'endomorphisme associé à f. Calculer $\varphi(\vec{\imath})$ et $\varphi(\vec{\jmath})$.
4. Soit M(x ; y) un point du plan et M(x' ; y') son image par f. Calculer $\varphi(\overrightarrow{AM})$ à l'aide de x et y, et en déduire l'expression de x' et y' en fonction de x et y.
5. Déterminer l'équation cartésienne du cercle C' image par f du cercle C de diamètre [AB].