Année Scolaire 2016/2017
École des Mines, de l'Industrie et de la Géologie (EMIG) TS 2
(A Remettre le Jeudi 29/09/17)

Devoir N° 3 de Mathématiques Appliquées

Exercice N° 1.

a.) Calculer l'intégrale de la forme différentielle ω le long du contour orienté C dans les cas suivants :

i.) $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ et (C) est l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 2x+1$ joignant les points $A(0,-1)$ et $B(0,1)$ parcouru une fois dans le sens des y croissants.

ii.) $\omega = xyz\,dx$ et C est l'arc : $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t \sin t$, t variant en croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

b.) Déterminer les fonctions dérivables g de la variable x de telle sorte que la forme différentielle $\omega = g(x)[x^2+y^2-a^2]dx - 2xy\,dy$ soit exacte. Calculer alors le potentiel scalaire.

Exercice N° 2.

Soit l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

1.) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1,+\infty[$, on a :
$$\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x\,dy}{1+xy}.$$

En déduire que $I = \iint_D \frac{x\,dx\,dy}{(1+x^2)(1+xy)}$ où (D) est le carré $[0,1]^2$.

2) En intervertissant les rôles de x et y, montrer que : $2I = \iint_D \frac{(x+y)\,dx\,dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$

En déduire que $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

Exercice n°3

Calculer les aires limitées par les courbes suivantes

a) L'hyperbole équilatère $xy=4$ et la droite d'équation $y=5-x$, $x>0$.

b) Les ellipses d'équations : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $(a>b)$.

c) Le cercle de centre O et de rayon 2 et l'hyperbole équilatère $xy=1$.

Exercice n°4

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\iint \frac{dx\,dy}{(4-x^2-y^2)^{1/2}}$ sur $x^2+y^2-2x\leq 0$

b) $\iint xy\,dx\,dy$ sur $\begin{cases} x^2+y^2-2x\leq 0 \\ x^2+y^2-y\geq 0 \end{cases}$

c-) $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et } x^{2/3} + y^{2/3} \leq 1\right\}$ et $f(x,y) = xy$. On posera :

$x = r\cos^3\theta$ et $y = r\sin^3\theta$.

d-) $\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ où (D) est le domaine limité par la surface d'équation :

$x^2+y^2 = 1$ et les plans $\begin{cases} z = -1-y \\ z = 1+y \end{cases}$.

e-) Calculer le volume limité par le plan $z=0$, et les surfaces d'équations :

$z = x^2+y^2$, $x = y^2$ et $y = x^2$.

Mr RAHAMADOU

Aissa ALZOUMA.