ÉCOLE DES MINES DE L'INDUSTRIE ET DE LA GÉOLOGIE(EMIG)
CONCOURS D'ENTRÉE SESSION SEPTEMBRE 2015 - CYCLE **INGÉNIEUR**
ÉPREUVE DE : **MATHÉMATIQUES**
DURÉE : **4 H** — COEF : **4**

Exercice n°1 *(4 points)*

1. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \mathrm{e}^{-n}$.
   (a) Justifier que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. ***(0,25 point)***
   (b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n \leq 1$. ***(0,25 point)***
2. Étudier le signe de la fonction $h(t) = 1 - \ln t$. ***(0,5 point)***
3. Calculer la dérivée de la fonction $g(t)$ définie sur $]0 \quad +\infty[$ par : $g(t) = t(2 - \ln t)$. ***(0,5 point)***
4. Déduire de la question précédente une primitive H de la fonction h qui s'annule en $t = \mathrm{e}^2$. ***(0,25 point)***
5. On Considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$V_n = \int_{\mathrm{e}^{-(n+1)}}^{\mathrm{e}^{-n}} (1 - \ln t)\,dt$$

   (a) Justifier que ; $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $V_n \geq 0$. ***(0,5 point)***
   (b) Déduire de la question 4. l'expression de V_n en fonction de n . ***(0,5 point)***
   (c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$. ***(0,5 point)***
6. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$.
   (a) Donner l'expression de S_n en fonction de n . ***(0,5 point)***
   (b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. ***(0,25 point)***

Exercice n°2 *(6 points)*

Soit J la matrice définie par : $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{E}$ désigne l'espace vectoriel réel orienté muni d'une base orthonormée directe $\beta = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de $\overrightarrow{E}$ définie par la matrice J relativement à la base β et $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

1. Calculer $f(\vec{u})$ et prouver que le plan (Q) d'équation $x + y + z = 0$ est stable par f - c'est-à-dire l'image par f de tout vecteur de (Q) appartient à (Q) -. ***(1,5 point)***
2. On pose : $\vec{v} = \vec{i} + \dfrac{1}{2}(-\vec{j} - \vec{k})$ et $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

(a) Vérifier que $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base du plan (Q) . ***(1 point)***

(b) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base orthonormée directe de $\overrightarrow{E}$? ***(1 point)***

(c) Trouver un réel θ tel que :

$$f(\vec{v}) = \cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta\,\vec{w} \quad \text{et} \quad f(\vec{w}) = -\sin\theta\,\vec{v} + \cos\theta\,\vec{w}.$$ ***(1,5 point)***

(d) Que savez-vous de la nature géométrique de la restriction de f à (Q) ? ***(1 point)***

Exercice n°3 *(10 points)*

Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2 y' = (2-x)y$. On note $I =]-\infty \quad 1[$.

1. Calculer une primitive A de la fonction a définie par : $a(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$. ***(1,5 point)***
2. Intégrer (E) sur I . ***(1 point)***
3. Soit f la fonction définie sur I par : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\exp\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.
   ($\exp(x)$ désigne la fonction exponentielle : e^x)

   (a) Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3 . ***(2 points)***

   (b) Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n , il existe un polynôme $P_n(X)$ tel que :

   $$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)\exp\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \forall x \in I.$$

   La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P'_n(X)$ et X . Expliciter cette relation. ***(2 points)***

   (c) Préciser $P_0(X)$, $P_1(X)$, $P_2(X)$ et $P_3(X)$. ***(1,5 point)***
4. En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E) prouver que :

$$P_{n+1}(X) = [(2n+1)X + X^2]P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X).$$ ***(2 points)***