ECOLE DES MINES DE L'INDUSTRIE ET DE LA GEOLOGIE(EMIG)
CONCOURS D'ENTREE SESSION AOUT 2013 - CYCLE **TECHNICIEN SUPÉRIEUR**
EPREUVE DE : **MATHÉMATIQUES**
DUREE : **4 H** — COEF : **4**

Exercice n°1 *(4 points)*

Une urne contient trois jetons indiscernables au toucher : un rouge, un noir, un blanc. Le tirage du jeton rouge rapporte deux francs, celui du jeton noir fait perdre un franc. Le tirage du jeton blanc arrête la partie. Après chaque tirage, le jeton tiré est remis dans l'urne. Une partie comporte trois tirages au plus.

1. Quelle est la probabilité pour que la partie s'arrête avant le troisième tirage ? ***(1,25 point)***
2. Soit X la variable aléatoire qui associe à toute partie le gain algébrique du joueur(somme des gains des différents tirages). Déterminer la loi de probabilité de X . ***(1,25 point)***
3. Une partie est gagnée quand le gain est strictement positif.
   (a) Quelle est la probabilité pour qu'une partie soit gagnée ? ***(0,75 point)***
   (b) Un joueur effectue 5 parties successives. Calculer la probabilité pour qu'il gagne exactement 3 parties. ***(0,75 point)***

Exercice n°2 *(4 points)*

1. On désigne par f la transformation du plan d'écriture complexe :

$$z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + i$$

   Donner la nature et les éléments caractéristiques de f . ***(1 point)***

2. Soit $u = \dfrac{ai - 4b}{5 + 3i}$ a et b sont réels.
   (a) Déterminer a et b sachant que u a pour module 1 et pour argument $\dfrac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$. ***(1 point)***
   (b) On pose $a = b = \sqrt{2}$. Démontrer que quels que soient les entiers naturels m et n , respectivement pair et impair, on a : $u^{4m} + u^{4n} = 0$. ***(1 point)***
   (c) Sachant que p et q sont deux entiers naturels consécutifs($q > p$), résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(en z !) :

$$z^2 \times u^{2p} - 2z \times u^{2q} - u^{2p} = 0. \quad \textbf{\textit{(1 point)}}$$

   (On donnera la ou les solution(s) sous forme cartésienne).

Problème *(12 points)*

1. Soit f l'application définie de $]0 \quad \pi[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\cos x}{\sin x}$$

   (a) Étudier les variations de f. ***(1 point)***

   (b) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0 \quad \pi[$ une solution α .***(0,5 point)***

   (c) Vérifier que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4}\right[$. ***(0,5 point)***

   (d) Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x . ***(0,5 point)***

2. Soit g l'application définie de $[-\pi \quad \pi]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x\cos^2(x)$$

   (a) Vérifier que : $-\pi \leq g(x) \leq \pi$.***(0,5 point)***

   (b) Étudier la parité de la fonction g puis en déduire le domaine d'étude E de g .***(0,5 point)***

   (c) Étudier les variations de g sur E (on pourra écrire $g'(x)$ en fonction de $f(x)$).***(1,5 point)***

   (d) Déterminer les tangentes T_0 et T_1 à la courbe $\mathcal{C}_g$ de g respectivement aux points d'abscisses 0 et π .***(0,5 point)***

   (e) Déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}_g$ par rapport à la droite $(\Delta) :\ y = x$.***(1 point)***

   (f) Construire la courbe $\mathcal{C}_g$ et les tangentes T_0 et T_1 .***(1 point)***

3. Soit h la restriction de g à l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{2} \quad \pi\right]$.

   (a) Démontrer que h est une bijection de I sur un intervalle K à préciser[1]. ***(0,5 point)***

   (b) h^{-1} est-elle dérivable en 0 ? ***(1 point)***

   (c) Dresser le tableau de variation de h^{-1} .***(0,5 point)***

   (d) Déterminer le point A intersection de $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ et (Δ) .***(0,5 point)***

   (e) Construire $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ dans le même repère que $\mathcal{C}_g$. ***(0,5 point)***

4. Soit m un paramètre réel. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $g(x) + m = 0$ dans l'intervalle $[-\pi \quad \pi]$ et suivant les valeurs de m . ***(1,5 point)***

1. On désigne par h^{-1} la bijection réciproque de h et par $\mathcal{C}_{h^{-1}}$ sa courbe.