EMIG

ECOLE DES MINES, DE L'INDUSTRIE ET DE LA GEOLOGIE (EMIG)
CONCOURS D'ENTREE SESSION D'AOUT 2019 – CYCLE INGENIEUR
EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE 4H / COEF 4

EXERCICE N°1 (2pts)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

a) $\int_2^{+\infty} \frac{4x}{x^4-1}dx$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

EXERCICE N°2 (5pts)

Soit g la fonction $2\pi-$périodique telle que

$$g(x) = \begin{cases} \pi - x & si \quad x \in [0, \pi] \\ x - \pi & si \quad x \in]\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

1) Reprénter le graphe de g dans un repère orthonormé.
2) Que peut-on dire de la convergence de la série de Fourier de g ? Justifier.
3)Calculer les coefficients de Fourier de g.
4)Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, la somme d'indice impaire $S_{2p+1}(g)$ a pour expression

$$S_{2p+1}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{p} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x)$$

5) En déduire les valeurs des suivantes : (a) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, (b) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$

EXERCICE N°3 (3pts)

Soit M la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que dét M $\neq 0$.

2) Soient $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs colonnes de M.

On pose $\vec{R}_1 = \vec{X}_1$, $\vec{R}_2 = \vec{X}_2 - t_{12}\vec{R}_1$, $\vec{R}_3 = \vec{X}_3 - t_{13}\vec{R}_1 - t_{23}\vec{R}_2$.

Déterminer t_{12}, t_{13}, t_{23} en supposant, $\vec{R}_2$, $\vec{R}_3$ 2 à 2 orthogonaux.

R_1

EXERCICE N°4 (5pts)

On pose : $I = \iint_D \dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}dxdy$

où $D = \{(x\,;y) \in 3^2 / x^2+y^2 \leq 1 \;\; x \geq 0\}$

a) En utilisant les coordonnées polaires (r, θ), montrer que :

$$I = \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)d\theta$$

b) Calculer I.

En utilisant les coordonnées sphériques :

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta,$$

calculer l'intégrale triple suivant :

$$J = \iiint_D \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{z} \right) dxdydz$$

où $D = \{(x,y,z) \in 3^3 / 0 \prec x^2+y^2+z^2 \prec 1,\; 0 \prec x^2+y^2 \prec z$ et $z \geq 0\}$

EXERCICE N°5 (5pts)

Soit y une fonction réelle de la variable réelle x. On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x(x^2+1)y'' + (x^2+1)y' = 1$$

On suppose qu'il existe une solution f de (E) développable en série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

a) Montrer que :

$$a_1 = -1 \quad et \quad \forall n \geq 2 \quad (n-1)a_{n-1} + (n+1)a_{n+1} = 0$$

b) En déduire les expressions de a_{2n+1} et a_{2n} pour $n \geq 1$, respectivement en fonction de a_1 et a_2.

c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Pour $|x| < 1$ donner l'expression de f(x) et vérifier que: $f(x) = a_0 - Arctgx + a_2 \ln(1+x^2)$.

EMIG

ECOLE DES MINES, DE L'INDUSTRIE ET DE LA GEOLOGIE (EMIG)
CONCOURS D'ENTREE SESSION D'AOUT 2019 – CYCLE INGENIEUR
EPREUVE DE FRANCAIS
DUREE 2H / COEF 2

Sujet N°1: Contraction de texte

Les problèmes qui concernent l'environnement ont, ces dernières années, complètement changé d'échelle. Après les scientifiques et les techniciens, les responsables politiques ont, eux aussi, peu à peu pris conscience de l'importance des problèmes. Ainsi aucun parti politique n'omet aujourd'hui d'inscrire dans son programme qu'il considère la protection de la nature comme un devoir auquel nul ne peut se soustraire.
[...]

Aujourd'hui on réalise que les problèmes les plus graves, ceux qui menacent les conditions de vie sont [...] dangereux pour tous les pays du monde, pour toutes les populations. [...] La dégradation de l'environnement est donc un problème qui ne peut plus être traité que dans le cadre de démarches internationales. Tous les pays sont devenus solidaires, dépendants les uns des autres. Dorénavant, aucun pays au monde ne devrait avoir le droit de faire seul des choix, dans quelque domaine que ce soit, qui risquent de porter atteinte à l'environnement mondial ; aucun pays ne devrait avoir le droit de continuer à mettre le monde en péril en refusant d'adopter des mesures reconnues indispensables.

Ceci est particulièrement vrai pour les pays industrialisés, principaux responsables de la situation actuelle. Mais cela est vrai aussi pour les pays sous-développés qu'il va falloir soutenir, aider à se développer sans pour autant porter atteinte à leur propre environnement et à l'environnement mondial.

Le monde d'aujourd'hui doit faire face à trois grands défis.

Premier défi : il s'agit d'abord de gagner la bataille de la connaissance, de la compréhension de ce qui se passe. La bataille de la connaissance, de la prise de conscience, c'est aussi la prévision de l'avenir : que va -t-il se passer si des mesures sérieuses et efficaces ne sont pas prises ?

Deuxième défi : gagner la bataille de la préservation, de la protection, de la diversité biologique. Beaucoup de peuples, parmi les plus pauvres, vivent de cette diversité. Ils y puisent de nombreuses richesses alimentaires, médicales, énergétiques.

Troisième défi : celui de l'avenir des choix à faire dès aujourd'hui, des décisions à prendre rapidement, pour éviter que le monde coure à la catastrophe.

Les données du problème sont claires : deux situations intimement liées sont responsables de la dégradation de notre environnement : le développement industriel des pays du Nord et le sous-développement, voire la misère, qui concerne aujourd'hui plus des 2/3 de la population mondiale. Les peuples, pour survivre, sur-exploitent, dégradent, polluent les milieux dans lesquels ils vivent.

Emile Rossler - *Editorial du Luxemburger Wort* du 18.8.1994

Vous ferez un résumé de ce texte au quart de sa longueur, puis vous y choisirez une idée que vous discuterez librement.

Vous pourriez par exemple choisir l'idée selon laquelle : << Les peuples, pour survivre, sur-exploitent, dégradent, polluent les milieux dans lesquels ils vivent.>>