ECOLE DES MINES, DE L'INDUSTRIE ET DE LA GEOLOGIE (EMIG)
CONCOURS D'ENTREE EN PREMIERE ANNEE DE L'EMIG - SESSION D'AOUT 2019
EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DUREE 4H / COEF 4

www.aemn-emig.org

EXERCICES

Exercice 1 : (4pts)

On considère l'équation : $(E)\ z^3 - 9z^2 + (22 + 12i)z - 12 - 36i = 0$

(1) Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire z_2. (1pt)
(2) Résoudre dans l'ensemble de complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E). (0.5pt)
(3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$; on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3$, $z_B = 2i$ et $z_C = 6 - 2i$.
a) Placer les points A, B et C dans le plan complexe. (0.5pt)
b) Monter que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. Que peut-on en déduire ? (0.75pt)
b) Soit S la similitude directe plane d'angle $\frac{\Pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ transformant A en B.
Donner l'écriture complexe de S et préciser son centre Ω. (1.25pt).

Exercice 2 : (4pts)

On considère les suites (Un) et (Vn) définies par : $\begin{cases} Uo = \frac{1}{2} \\ Vo = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ U_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}U_n - V_n \\ V_{n+1} = U_n + \frac{\sqrt{3}}{3}V_n \end{cases}$

On pose $Z_n = U_n + iV_n$

1) Montrer que (Z_n) est une suite géometrique, donner la raison et le premier terme.
En déduire Z_n en fonction de n. (1pt)
2) On considère (r_n) et (θ_n) respectivement le module et l'argument de Z_n.
a) Calculer r_n et θ_n. (1 pt)
b) Préciser la nature de chacune des suites (r_n) et (θ_n) et les caractériser. (0.5pt)
3) a) Donner la forme géométrique et la forme algébrique de Z_n . (0,5pt)
b) En déduire les expressions de U_n et V_n. (0,5pt)
4) Déterminer n entier naturel pour que Z_n soit réel. (0,5pt)

PROBLEME : (12 pt)

PARTIE A :

Soit la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + \ln x$.

(1) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. (1 pt)
(2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur $]0\,;\,+\infty[$. (0.5 pt)
b)Montrer que $0{,}5\,48 < \alpha < 0{,}549$. (0.5 pt)
(3) Préciser le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . (0.5 pt)

PARTIE B :

Soit la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 1 - x + \frac{1+\ln x}{2x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ayant pour unité graphique 4 cm.

(1) (a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0.75 pt)

(b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. (0.5 pt)

(c) Monter que la droite (D) d'équation $y = 1 - x$ est asymptote à (C).

Etudier la position de (C) par rapport à l'asymptote (D). (0.75 pt)

(2) a) Calculer $f'(x)$ et monter que $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x^2}$. (0.75 pt)

b) Dresser la tableau de variation f. (0.75 pt)

(3) (a) Monter que $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \frac{1}{2\alpha}$. (0.5 pt)

(b) Donner alors un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} prés. (0.5 pt)

(4) (a) Calculer les coordonnées du point de (C) où la tangente est parallèle à (D). Donner une équation de cette tangente (T). (1 pt)

(b) Tracer (C) (D) et (T) dans le repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (1.5 pt)

(c) Soit λ un réel supérieur à $\frac{1}{e}$.

Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie comprise entre (C) et (D) et les droites d'équation $x = \frac{1}{e}$ et $x = \lambda$. (1.5 pt)

Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$. (1.5 pt)

www.aemn-emig.org