ÉCOLE DES MINES DE L'INDUSTRIE ET DE LA GÉOLOGIE(EMIG)
CONCOURS D'ENTRÉE SESSION AOÛT 2018 - CYCLE INGÉNIEUR
ÉPREUVE DE : MATHÉMATIQUES
DURÉE : 4 H — COEF : 4

Exercice n°1 *(4 points)*

Sur le corps complexe $\mathbb{C}$ on note $i = \sqrt{-1}$. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\alpha}{n} \\ -\frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix},$$

où α est un paramètre réel et n un entier positif. On pose $V_1 = (-i, 1)$; $V_2 = (i, 1)$.

1. Vérifier que V_1 et V_2 sont deux vecteurs propres de A associés respectivement à deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 que l'on précisera. ***(1,5 point)***
2. Diagonaliser la matrice A. ***(1 point)***
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} A^n$. On admettra : $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{i\alpha}{n}\right)^n = e^{i\alpha}$, pour α réel. ***(1,5 point)***

Exercice n°2 *(8 points)*

Soit f une fonction strictement croissante et dérivable sur l'intervalle $[0\ ,\ a]$ telle que $f(0) = 0$. On pose $g = f^{-1}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in [0\ ,\ a]$; $\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt - xf(x) = 0.$ ***(2 points)***
2. En déduire que $\forall\, 0 \le u \le a$ et $0 \le v \le f(a)$
$$\int_0^u f(t)dt + \int_0^v g(t)dt = uf(u) + \int_{f(u)}^v g(t)dt. \quad \textit{\textbf{(1 point)}}$$
3. Démontrer que $\forall\, 0 \le u \le a$ et $0 \le v \le f(a)$
$$uv \le \int_0^u f(t)dt + \int_0^v g(t)dt. \quad \textit{\textbf{(2 points)}}$$
4. En choisissant convenablement la fonction f établir : $\forall\, u \ge 0\ ,\ v \ge 0$
$$uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \quad \text{si} \quad p > 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$ *(L'inégalité de Young)*. ***(1,5 point)***
5. En désignant par $a_1\ ,\ a_2\ ,\cdots,a_n$ et $b_1\ ,\ b_2\ ,\cdots,b_n$ deux suites finies de nombres réels positifs, déduire de ce qui précède :
$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \le \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$ *(L'inégalité de Hölder)*. ***(1,5 point)***

Exercice n°3 *(8 points)*

A. Une équation différentielle de la forme :

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\beta} \tag{1}$$

où β est un réel et $a(x)$, $b(x)$ des fonctions réelles quelconques est dite *équation de Bernoulli.*

*A.*1. Vérifier que si $\beta = 0$ ou $\beta = 1$ l'équation (1) est une équation différentielle linéaire et que si $\beta > 0$ $y = 0$ est solution de l'équation (1)(dite *solution singulière*). *(1 point)*

*A.*2 En posant $z = y^{1-\beta}$ $\beta \neq 1$ montrer que l'équation (1) devient une équation différentielle linéaire. *(2 points)*

B. Soit l'équation différentielle :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \tag{2}$$

$a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ étant des fonctions réelles quelconques.

*B.*1. Montrer que si l'on connait une solution $x \mapsto y_1(x)$ de l'équation (2)(dite *équation de Ricatti*) alors en posant $y = y_1(x) + z(x)$ on se ramène à une équation de Bernoulli. *(1,5 point)*

C. On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2y' = x^2y^2 + xy + 1 \tag{3}$$

*C.*1. Montrer que l'équation (3) admet une solution de la forme :

$$y_1(x) = -x^n \quad n \in \mathbb{Z} - \{0\} \quad \textit{(1,5 point)}$$

*C.*2. Résoudre l'équation (3) dans $]0\,,+\infty[$. *(2 points)*

ECOLE DES MINES, DE L'INDUSTRIE ET DE LA GEOLOGIE (EMIG)
CONCOURS D'ENTREE SESSION AOUT 2018 – CYCLE INGENIEUR
EPREUVE DE FRANCAIS
DUREE : 2H --- COEF : 2

« Celui qui a des clartés de tout est-il, comme on le pensait au XVII[ème] siècle, le modèle de l'homme cultivé ? Certes non. On ne peut rien connaitre sérieusement à notre époque si l'on n'a que des clartés, disons plutôt des lueurs, de tout. Il y a trop de champs de connaissance et il est bien difficile de n'être pas alors purement superficiel. Autrefois, le champ des données était réduit et une intelligence large pouvait **l'embrasser.** Cette étape est largement dépassée : on doit aujourd'hui se spécialiser car la connaissance est multiple ; la construction d'un gros objet, barrage, réacteur nucléaire, avion supersonique, synchrotron géant et même le minuscule transistor qui est en fait un gros objet, par la science et la technique, cette construction est extraordinairement complexe et exige des équipes formées de spécialistes.

La spécialisation donne la possibilité d'approfondir un domaine, de devenir parfois, à un moment de sa vie, le meilleur. Il faut avoir résolu bien de problèmes, lutté passionnément contre les réactions de la matière ou des hommes, gagné une partie. C'est **manifestement** un élément de valeur humaine ; la culture actuelle passe par la spécialisation.

Mais non une spécialisation "jusqu'au-boutiste". Il faut l'associer à l'ouverture. La personnalité se développe et se précise dans une spécialité, mais elle risque, si cela dure trop longtemps dans la même voie, de voir son horizon se limiter. De toute façon, l'homme superficiel, qui n'a aucune connaissance profonde par l'intérieur, est comme une mouche qui zigzague et finalement ne produit que de l'agitation. Il n'est pas cultivé. A l'autre bout, le spécialiste étroit et prolongé, **le spécialiste à œillères définitives**, ne l'est pas non plus, c'est manifeste.

Faut-il apprendre beaucoup pour être cultivé ? Pas nécessairement et surtout pas trop. Notre cerveau ressemble à un immense ordinateur complexe. Ses mémoires se remplissent par toutes les incitations reçues de l'extérieur et Dieu sait si elles sont nombreuses, de plus en plus chaque année. Le grand problème pour l'enfant et l'homme est précisément de ne pas **saturer** toutes ses mémoires, de ne pas tout connaitre, de garder des places libres, et il en faut beaucoup pour accueillir les nouveautés qui défilent à toute allure. Surtout, ne saturons pas le cerveau. Gardons-nous d'être des dictionnaires vivants. Il y en a : ils nous étonnent quand ils donnent toutes les réponses aux questions compliquées, qu'elles soient bleues, vertes ou rouges, de certains jeux radiophoniques. Les pauvres, ils ne sont pas cultivés, ils sont saturés, on extrait les informations de leur cerveau comme on en extrait d'un ordinateur dont toutes les mémoires sont occupées. »

(430 mots)

Louis Leprince Ringuet, Science et Bonheur des hommes, Flammarion, 1973.

I. Expliquez les mots en gras du texte (4points)

II. Trouvez quatre métaphores et deux comparaisons dans le texte (3points)

III. Résumez le texte au quart de sa longueur initiale avec une de tolérance de plus ou moins 10%. Indiquez à la fin de votre résumé le nombre de mots utilisés (13points)