Devoir n°1

Durée :*2 heures*

L'usage des téléphones portables(même comme calculatrices) n'est pas autorisé. Les formulaires des fonctions trigonométriques et hyperboliques réelles ainsi que la table des primitives des fonctions usuelles, sont autorisés.

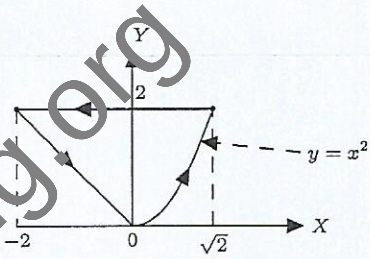
Exercice n°1*(7 points)*

1. Soient ϕ une fonction des variables réelles x , y telle que $F(x-a\phi, y-b\phi)=0$, où F est une fonction différentiable(dérivées partielles continues). Montrer que :

$$a\frac{\partial\phi}{\partial x}+b\frac{\partial\phi}{\partial y}=1.$$

2. Vérifier la formule de Green-Riemann sur le contour ci-contre pour la forme différentielle :

$$\omega=(2xy-y^2)dx+x^2dy$$



Exercice n°2*(7 points)*

Le plan complexe est coupé suivant la demi-droite $\mathrm{Arg}(z)=\pi/4$. On donne :

$$\log(1)=2\pi i \quad \text{et} \quad \arcsin(z)=-i\log(iz+\sqrt{1-z^2})$$

$\sqrt{}$ *désigne la détermination principale de la fonction racine.*

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1=(1+i)^{2i+1} \quad , \quad z_2=\log(1+i\sqrt{2}) \quad , \quad z_3=\arcsin\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Exercice n°3*(6 points)*

On considère la fonction de deux variables réelles $Q(x,y)=x^2-y^2+xy$.

1. Montrer que Q est une fonction harmonique.
2. Déterminer la fonction f holomorphe sur D (Préciser D) de partie imaginaire Q avec $f(0)=1$.
3. Calculer $f'(z)$.
4. Exprimer f en fonction de la variable $z=x+iy$.