Devoir n°1

Durée :*2 heures*

L'usage des téléphones portables(même comme calculatrices) n'est pas autorisé.
Les formulaires des fonctions trigonométriques et hyperboliques réelles ainsi que la table des primitives des fonctions usuelles, sont autorisés.

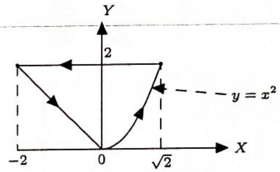
Exercice n°1*(7 points)*

1. Soient ϕ une fonction des variables réelles x , y telle que $F(x - a\phi, y - b\phi) = 0$, où F est une fonction différentiable(dérivées partielles continues). Montrer que :

$$a\frac{\partial \phi}{\partial x} + b\frac{\partial \phi}{\partial y} = 1.$$

2. Vérifier la formule de Green-Riemann sur le contour ci-contre pour la forme différentielle :

$$\omega = (2xy - y^2)dx + x^2 dy$$



Exercice n°2*(7 points)*

Le plan complexe est coupé suivant la demi-droite $\operatorname{Arg}(z) = \pi/4$. On donne :

$$\log(1) = 2\pi i \quad \text{et} \quad \arcsin(z) = -i\log(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

$\sqrt{\ }$ *désigne la détermination principale de la fonction racine.*

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = (1 + i)^{2i+1} \quad , \quad z_2 = \log(1 + i\sqrt{2}) \quad , \quad z_3 = \arcsin\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Exercice n°3*(6 points)*

On considère la fonction de deux variables réelles $Q(x, y) = x^2 - y^2 + xy$.

1. Montrer que Q est une fonction harmonique.
2. Déterminer la fonction f holomorphe sur D (Préciser D) de partie imaginaire Q avec $f(0) = 1$.
3. Calculer $f'(z)$.
4. Exprimer f en fonction de la variable $z = x + iy$.

Corrigé devoir n°1

Exercice n°1 *(7 points)*

1. Soient ϕ une fonction des variables réelles x, y telle que $F(x-a\phi, y-b\phi)=0$, où F est une fonction différentiable. Montrons que : $a\dfrac{\partial\phi}{\partial x}+b\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=1$. Posons :

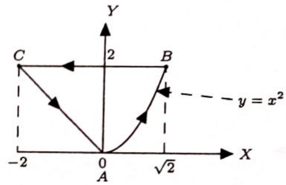
$$u(x,y)=x-a\phi(x,y) \quad \text{et} \quad v(x,y)=y-b\phi(x,y). \quad \text{Alors}$$

$$f(x,y)=F(u(x,y),v(x,y))=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial u}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial u}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

ceci entraine :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow \left(1-a\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\left(1-b\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=ab\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} \Leftrightarrow a\frac{\partial\phi}{\partial x}+b\frac{\partial\phi}{\partial y}=1.\textit{(3 points)}$$

2. Formule de Green-Riemann :
$\omega=(2xy-y^2)dx+x^2dy$



$$\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}}\omega &= \int_0^{\sqrt{2}}(2x^3-x^4+2x^3)dx \\ &= (20-4\sqrt{2})/5\end{aligned}$$

$$\int_{\overline{BC}}\omega = \int_{\sqrt{2}}^{-2}(4x-4)dx=12+4\sqrt{2}$$

$$\int_{\overline{CA}}\omega = \int_{-2}^{0}(-2x^2-x^2-x^2)dx=-32/3$$

$$\int_{\gamma^+}\omega=\int_{\widehat{AB}}\omega+\int_{\overline{BC}}\omega+\int_{\overline{CA}}\omega=\frac{80+48\sqrt{2}}{15}$$

Posons $P(x,y)=2xy-y^2$ et $Q(x,y)=x^2$:

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D(2x-2x+2y)dxdy$$

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=2\int_0^2\left(\int_{-y}^{\sqrt{y}}y\,dx\right)dy=2\int_0^2\left(y\sqrt{y}+y^2\right)dy=\frac{80+48\sqrt{2}}{15}$$

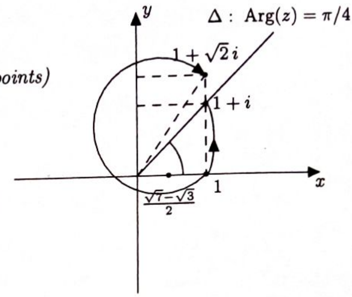
$$\int_{\gamma^+}\omega=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy. \qquad \textbf{CQFD} \qquad \textit{(2+2 points)}$$

Exercice n°2 *(7 points)*

Le plan complexe est coupé suivant la demi-droite $\mathrm{Arg}(z) = \pi/4$. On donne :

$$\log(1) = 2\pi\, i \quad \text{et} \quad \arcsin(z) = -i \log(iz + \sqrt{1-z^2})$$

$\sqrt{\ }$ *désigne la détermination principale de la fonction racine.*



$$\mathrm{Arcsin}\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -i\left(\ln\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi\, i\right) \quad \textit{(2 points)}$$

$$\log(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) \quad \textit{(2 points)}$$

$$\log(1+i\sqrt{2}) = \ln\sqrt{3} + i\left(2\pi - \left(2\pi - \mathrm{Arctg}\left(\sqrt{2}\right)\right)\right)$$

$$\log(1+i\sqrt{2}) = \ln\sqrt{3} + i\mathrm{Arctg}\left(\sqrt{2}\right) \quad \textit{(2 points)}$$

$$(1+i)^{1+2i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-(4\pi+\pi/2)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\ln\sqrt{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\ln\sqrt{2}\right)\right] \quad \textit{(1 point)}$$

Exercice n°3 *(6 points)*

On considère la fonction de deux variables réelles $Q(x,y) = x^2 - y^2 + xy$.

1. Q est une fonction harmonique. *(1 point)*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x + y \quad ; \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 2$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -2y + x \quad ; \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = -2$$
$$\Rightarrow \quad \Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$$

2. Déterminer la fonction f holomorphe de partie imaginaire Q avec $f(0) = 1$.

$$f(z) = P + iQ \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -2y + x \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2x - y \end{cases} \qquad P(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - 2xy + 1$$

$$f(z) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - 2xy + 1\right) + i(x^2 - y^2 + xy) \quad \text{holomorphe sur} \quad \mathbb{C}. \quad \textit{(2 points)}$$

3. $f'(z) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + i\dfrac{\partial Q}{\partial x} = (x - 2y) + i(2x + y) = (x + iy) + 2i(x + iy) = (1 + 2i)z$. *(2 points)*

4. f en fonction de la variable $z = x + iy$: $f(z) = \dfrac{1}{2}(1 + 2i)z^2 + 1$. *(1 point)*