

Devoir n°1 :

Durée : 2 heures

**Documents non autorisés.**

*L'usage des téléphones portables(même comme calculatrices) n'est pas autorisé.*

**Exercice n°1(6 points)**

On considère deux événements  $A$  et  $B$  :

1. On donne  $\mathbb{P}(A) = 1/3$ ,  $\mathbb{P}(B) = 1/2$  et  $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$ . Calculer
  - (a)  $\mathbb{P}(\bar{A} \cup \bar{B})$
  - (b)  $\mathbb{P}(A/\bar{B})$  et  $\mathbb{P}(\bar{B}/\bar{A})$
2. On donne  $\mathbb{P}(A) = 1/5$ ,  $\mathbb{P}(B) = 1/4$  et  $\mathbb{P}(A \cup B) = \alpha$ . Pour quelles valeurs de  $\alpha$   $A$  et  $B$  sont-ils indépendants?

**Exercice n°2(7 points)**

On étudie la mise en place d'un test diagnostique  $T$  qui doit révéler une maladie  $M$  et on définit les événements suivants :  $T$  : le test est positif,  $M$  : la maladie est présente. On appelle  $S_e = \mathbb{P}(T/M)$  la sensibilité du test et  $S_p = \mathbb{P}(\bar{T}/\bar{M})$  la spécificité du test. Le test est idéal quand  $S_e = S_p = 1$ . On suppose  $0 < \mathbb{P}(M) < 1$ .

1. Dans quels cas le test apportera-t-il une juste conclusion ?
2. Montrer que la probabilité de cette juste conclusion est égale à :  $(S_e - S_p)\mathbb{P}(M) + S_p$ .
3. Le test apporte une information intéressante si  $\mathbb{P}(M/T) > \mathbb{P}(M)$ .
  - (a) Montrer qu'alors  $\mathbb{P}(T/M) > \mathbb{P}(T/\bar{M})$
  - (b) En déduire  $S_e + S_p > 1$
4. Application numérique :  $S_e = 0,94$  ;  $S_p = 0,93$ .
  - (a) Calculer la probabilité de prédire la présence de la maladie quand le test est positif, dans les deux cas suivants :  $\mathbb{P}(M) = 0,02$  et  $\mathbb{P}(M) = 0,20$ .
  - (b) Conclure sur l'influence de  $\mathbb{P}(M)$  sur ces résultats.

**Exercice n°3(7 points)**

Un système technique se compose de trois appareils  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  avec les fiabilités respectives  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ . La panne ne serait-ce que d'un seul appareil entraîne la mise hors service du système.

1. Faire le diagramme du système et calculer sa fiabilité.
2. Pour améliorer la fiabilité du système le premier appareil(Le moins fiable) est doublé par un autre appareil identique  $A'_1$ , en redondance passive. Lorsque  $A_1$  tombe en panne un dispositif de commutation  $C$  de fiabilité  $c$  enclenche instantanément  $A'_1$ .
  - (a) Faire le diagramme du système amélioré(Le dispositif de commutation fera figure)
  - (b) Calculer sa fiabilité.
  - (c) Y'a-t-il une différence en terme de fiabilité si la redondance était active?(Justifiez votre réponse).
3. Application numérique :  $p_1 = 0,6$ ,  $p_2 = p_3 = 0,9$ ,  $c = 0,95$ .