Devoir n°2

Durée :2 heures

L'usage des téléphones portables(même comme calculatrices) n'est pas autorisé. Les tables des lois usuelles sont autorisées.

Exercice n°1 *(5 points)*

Les lois des variables aléatoires discrètes X et Y s'écrivent :

$$X : \begin{array}{|ccccc|} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,3 & 0,1 \end{array} \qquad Y : \begin{array}{|ccccc|} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \end{array}$$

1. Trouver les lois des variables aléatoires $Z = \min(X, 4)$ et $T = Y^2$.
2. Calculer $\mathbf{E}(Z)$ et $\mathbf{E}(T)$

Exercice n°2 *(7 points)*

Une v.a X a pour d.d.p la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} Ke^{x} & \text{si } x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer K et la fonction $F(x)$, f.d.r de X.
2. Représenter $f(x)$ et Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $var(X)$.

Exercice n°3 *(8 points)*

1. La variable aléatoire X suit la loi normale $N(0,1)$ Calculer :
   (a) $\mathbf{P}(0,75 < X)$
   (b) $\mathbf{P}(|X| < 1,5)$
2. On suppose que la température T au mois de Juin suit une loi normale $N(m, \sigma)$, elle est en dessous de $21°C$ avec probabilité $p_1 = 0,629$ et au dessus de $26°C$ avec probabilité $p_2 = 0,023$
   (a) Quelle est la température moyenne au mois de Juin.
   (b) Calculer : $\mathbf{P}(T < 25°C)$

N.B : *L'usage des calculatrices des téléphones portables n'est pas autorisé.*

UN EXTRAIT DE VOTRE RÈGLEMENT INTÉRIEUR

<u>Article 31</u> :Un élève qui aurait obtenu une moyenne annuelle supérieure ou égale à 12/20 et qui aurait une note éliminatoire(note $\leq$ 5/20) dans une discipline, devra passer **une session de rattrapage obligatoire** organisée par la Direction des Études **après la tenue du jury de passage**....

Corrigé : devoir n°2

Exercice n°1 *(5 points)*

1. Les lois des variables aléatoires $Z = \min(X, 4)$ et $T = Y^2$ *.(2,5 points)*

$$Z(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\} \quad T(\Omega) = \{0, 1, 4\}$$

z	1	3	4	t	0	1	4
p_z	0,1	0,2	0,7	p_t	0,2	0,5	0,3
zp_z	0,1	0,6	2,8	tp_t	0	0,5	1,2

2. $\mathbf{E}(Z) = \sum zp_z = 3,5$ et $\mathbf{E}(T) = \sum tp_t = 1,7$ ***(2,5 points)***

Exercice n°2 *(7 points)*

Une v.a X a pour d.d.p la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} Ke^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -x+1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Détermination de K : on écrit : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} Ke^x\,dx + \int_0^1 (-x+1)\,dx = 1$

$$[Ke^x]_{-\infty}^0 + \left[-\frac{x}{2} + x\right]_0^1 = K - \frac{1}{2} + 1 = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2} \quad \textbf{\textit{(0,5 point)}}$$

2. $\mathbf{E}(X)$ et $var(X)$:

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx + \int_0^1 x(-x+1)\,dx$$

$$\mathbf{E}(X) = \left[\frac{1}{2}(x-1)e^x\right]_{-\infty}^0 + \left[-\frac{2x^3 - 3x^2}{6}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} \quad \textbf{\textit{(1,5 point)}}$$

de façon analogue :

$$\mathbf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^x\right]_{-\infty}^0 + \left[-\frac{3x^4 - 4x^3}{12}\right]_0^1$$

$$\mathbf{E}(X^2) = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12} \Rightarrow \underline{var(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \frac{35}{36}} \quad \textbf{\textit{(2 points)}}$$

Exercice n°3 *(8 points)*

1. La variable aléatoire X suit la loi normale $N(0,1)$ (de répartition $\Pi(x)$). Usage de la table de la loi normale :
   (a) $\mathbf{P}(0,75 < X) = 1 - \mathbf{P}(X \leq 0,75) = 1 - \Pi(0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266$ ***(1,5 point)***
   (b) $\mathbf{P}(|X| < 1,5) = \mathbf{P}(-1,5 < X < 1,5) = \Pi(1,5) - \Pi(-1,5) = 0,8664$ ***(1,5 point)***

2. On suppose que la température T au mois de Juin suit une loi normale $N(m,\sigma)$, elle est en dessous de $21°C$ avec probabilité $p_1 = 0,629$ et au dessus de $26°C$ avec probabilité $p_2 = 0,023$.

(a) La température moyenne(m) au mois de Juin :

$$\begin{matrix} \mathbb{P}(T < 21) & = & 0,629 \\ \mathbb{P}(T > 26) & = & 0,023 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \Pi\left(\dfrac{21-m}{\sigma}\right) & = & 0,629 \\ 1-\Pi\left(\dfrac{26-m}{\sigma}\right) & = & 0,023 \end{cases} \quad \textit{(2 points)}$$

La table de la loi $N(0,1)$ de fonction de répartition $\Pi(x)$ permet de tirer le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{21-m}{\sigma} & = & 0,3292 \\ \dfrac{26-m}{\sigma} & = & 1,9954 \end{cases} \Rightarrow \quad m = 20,012°C \quad \text{et} \quad \sigma = 3°C \quad \textit{(2 points)}$$

(b) $\mathbb{P}(T < 25°C) = \Pi\left(\dfrac{25-20,012}{3}\right) = 0,9515$ ***(1 point)***

Exercice n°2 *(7 points)*

Une **v.a** X a pour **d.d.p** la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & \text{si} \quad x \le 0 \\ -x+1 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^x & \text{si} \quad x \le 0 \\ \dfrac{-x^2+2x+1}{2} & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases} \quad \textit{(1,5 point)}$$

Représentation graphique ***(1,5 point)***