Devoir n°3

Durée :*2 heures*

L'usage des téléphones portables(même comme calculatrices) n'est pas autorisé. Les formulaires des fonctions trigonométriques et hyperboliques réelles ainsi que la table des primitives et des transformées de Laplace des fonctions usuelles, sont autorisés.

Exercice n°1 *(6 points)*

1. Utiliser la formule intégrale de Cauchy pour calculer l'intégrale :

$$\oint_{\gamma^+} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz \quad ; \quad \gamma : |z-2| = 5$$

2. Calculer par la méthode des résidus l'intégrale suivante : $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2 + x + 1} dx$

****

Dans les exercices suivants :

$\mathcal{L}(f,.)$ désigne la transformée de Laplace de f et $\mathfrak{U}(x)$ la fonction échelon unité.

****

Exercice n°2 *(6 points)*

1. Calculer la transformée de Laplace, $\mathfrak{L}(f,p)$ pour la fonction :

$$f(x) = e^{-x} \sin^2 x\, \mathfrak{U}(x)$$

2. Trouver l'original, $\mathfrak{L}^{-1}(F,x)$, de la fonction : $F(p) = \dfrac{2p^2 - 9p + 19}{(p-1)^2(p+3)}$

Exercice n°3 *(8 points)*

1. Montrer que : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad \begin{cases} xy'' + 2y' + xy = 0 \\ y(0^+) = 1 \quad y'(0^+) = 0 \end{cases}$$

2. Trouver l'équation transformée de (E) par la transformation de Laplace et intégrer.

3. En déduire $\mathcal{L}\left(\dfrac{\sin x}{x}, p\right)$.

   Indication : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé devoir n°3

Exercice n°1 *(6 points)*

1. **La formule intégrale de Cauchy pour calculer :** $\oint_{\gamma^+} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz \quad ; \quad \gamma : |z-2| = 5$

   Écrivons : $\frac{e^{z^2}}{z^2-6z} = \frac{1}{6}\left(\frac{e^{z^2}}{z-6} - \frac{e^{z^2}}{z}\right)$

$$\oint_{\gamma^+} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \frac{1}{6}\oint_{\gamma^+} \frac{e^{z^2}}{z-6}dz + \frac{1}{6}\oint_{\gamma^+} \frac{e^{z^2}}{z}dz = \frac{1}{6}2\pi i(e^{36}-1) = \frac{\pi}{3}(e^{36}-1)i$$

$$\boxed{\oint_{\gamma^+} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz = \frac{\pi}{3}(e^{36}-1)i} \textbf{\textit{(2,5 points)}}$$

2. **Calcul par la méthodes des résidus l'intégrale suivante :** $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+x+1}dx$

   Écrivons : $\frac{\sin^2 x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{\cos 2x}{x^2+x+1}\right)$ et posons :

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx \quad \text{et} \quad J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+x+1}dx \quad \text{Alors} \quad J = \frac{1}{2}(J_1 - \Re e(J_2))$$

$$J_1 = 2\pi i \sum_{\Im m(z_k)>0} \mathcal{R}es\left(\frac{1}{z^2+z+1}, \text{pôles } z_k\right) \quad \text{et} \quad J_2 = 2\pi i \sum_{\Im m(z_k)>0} \mathcal{R}es\left(\frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}, \text{pôles } z_k\right)$$

$$J_1 = 2\pi i\mathcal{R}es\left(\frac{1}{z^2+z+1}, \text{pôle } z_0\right) \quad \text{et} \quad J_2 = 2\pi i\mathcal{R}es\left(\frac{e^{2iz}}{z^2+z+1}, \text{pôle } z_0\right) \quad ; \quad z_0 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$J_1 = 2\pi i \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad J_2 = 2\pi i \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}ie^{-i-\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}e^{-i-\sqrt{3}}$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2}(J_1 - \Re e(J_2)) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\left(1 - e^{-\sqrt{3}}\cos(1)\right)} \textbf{\textit{(3,5 points)}}$$

Exercice n°2 *(6 points)*

1. **Transformée de Laplace de :** $f(x) = e^{-x}\sin^2 x\,\mathfrak{U}(x)$ ***(3 points)***

$$\mathfrak{L}(e^{-\beta x}f(x), p) = \mathfrak{L}(f(x), p+\beta) \quad \text{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\mathfrak{L}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}, p\right) = \frac{1}{2p} - \frac{p}{2(p^2+4)} \Rightarrow \mathfrak{L}\left(e^{-x}\sin^2 x, p\right) = \frac{1}{2(p+1} - \frac{p+1}{2((p+1)^2+4)}$$

2. **L'original,** $\mathfrak{L}^{-1}(F,x)$ **, de la fonction :** $F(p) = \frac{2p^2-9p+19}{(p-1)^2(p+3)}$ ***(3 points)***

$$F(p) = \frac{4}{p+3} - \frac{2}{p-1} + \frac{3}{(p-1)^2} \Rightarrow \mathfrak{L}^{-1}(F,x) = (4e^{-3x} - 2e^{x} + 3xe^{x})\mathfrak{U}(x)$$

Exercice n°3 *(8 points)*

1. Montrons que : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad \begin{cases} xy'' + 2y' + xy & = 0 \\ y(0^+) = 1 \quad y'(0^+) & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} xf(x) & = & \sin x \\ 2f'(x) & = & \frac{2x\cos x - 2\sin x}{x^2} \\ xf''(x) & = & \frac{-x^2\sin x + 2\sin x - 2x\cos x}{x^2} \\ \hline xf'' + 2f' + xf & = & 0 \end{array}$$

   il est clair que $f(0^+) = 1$ et $f'(0^+) = 0$.***(2,5 points)***

2. L'équation transformée de (E) : On a $\mathfrak{L}(xf,p) = -\frac{d\mathfrak{L}(f,p)}{dp}$.
   Posons $Y(p) = \mathfrak{L}(y,p)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{L}(xy,p) & = & -\frac{dY}{dp} \\ 2\mathfrak{L}(y',p) & = & 2pY - 2 \\ \mathfrak{L}(xy'',p) & = & -p^2\frac{dY}{dp} - 2pY + 1 \\ \hline \mathfrak{L}(xy'' + 2y' + xy, p) & = & -(1+p^2)\frac{dY}{dp} - 1 \end{array}$$

   En intégrant : $(1+p^2)\frac{dY}{dp} + 1 = 0$ on tire : $\mathfrak{L}(y,p) = -\text{Arctg}\,p + C$ ***(3 points)***

3. $\mathcal{L}\left(\frac{\sin x}{x}, p\right)$:

   La constante C pour la fonction f est $\mathfrak{L}(f,0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$. Par suite :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin x}{x}, p\right) = -\text{Arctg}\,p + \frac{\pi}{2} \quad \textbf{\textit{(2,5 points)}}$$

   Noter que : $\text{Arctg}\,p + \text{Arctg}\frac{1}{p} = \frac{\pi}{2}$.