# TD 1 d'analyse Numérique

**Exercice 1** : Soient A la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

1) La matrice A est-elle inversible ?
2) Donner la matrice inverse de A en utilisant deux méthodes différentes

**Exercice 2** : Soient le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

1) Ecrire ce système sous la forme AX = B
2) Résoudre le système par la méthode de Pivot de Gauss
3) Donner une décomposition Lu de A et le système par la méthode de décomposition LU solution.
4) Donner les solutions pour chacune des valeurs de $B^T$ suivantes : (1 ;2 ;3 ;4), (0 ; -1 ; 1 ;2).

**Exercice 3** : On cherche à résoudre le système Ax = b par les méthodes directe et indirecte.
Soit $A = (a_{ij})$ avec $1 \leq i, j \leq n$, une matrice carrée vérifiant les conditions suivantes :
$a_{ii} > 0$ , $1 \leq i \leq n$ $\qquad$ $a_{ij} \leq 0$ , $1 \leq i \neq j \leq n$ $\qquad$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$, $1 \leq i \leq n$
Soit D la matrice diagonal ($d_{ii} = a_{ii}$ et $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$)

1) Montrer que la matrice D est inversible et donner $D^{-1}$.
2) Montrer que la matrice A est à diagonale strictement dominante.
3) Donner l'expression de la matrice $A^{(1)}$ obtenue après la première étape de la méthode de Gauss.
4) Montrer que la matrice B d'ordre (n – 1) obtenue à partir de $A^{(1)}$ en enlevant la première ligne et la première colonne est aussi à diagonale strictement dominante.
5) Ecrire le schéma itératif de Jacobi $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d$
6) Expliciter les composantes $x_j^{(k+1)}$ en fonction de celles de $x^{(k)}$ et de d.

**Exercice 4** : Soient le système suivant :

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 2 \\ -x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

Résoudre ce système en utilisant la méthode de Jacobi et la méthode de Gauss-Seidel et en prenant $X^{0T} = (0 ; 0 ; 0 ; 0)$. (On s'arrete après 4 itérations).

Atlaher
IG/TC
2017

# TD 2 d'analyse numérique

**Exercice 1** :

1) Calculer le polynôme passant par les points (0 ; 0), (1 ; 3), (3 ; 1) ; (5 ; 2), (8 ; 2)
   a) Par la méthode de Legendre
   b) En utilisant la formule de Newton.
2) Soit f une fonction définie dans [-1 ; 1] et p le polynôme d'Hermite (de degré $\leq 3$) de f vérifiant p(-1) = f(-1), p'(-1) = f '(-1), p(1) = f(1), p'(1) = f '(1). Ecrire le polynôme p.
3) Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points d'appui d'abscisses : −2, −1, 0, 1, 2. Ensuite discuter l'erreur d'interpolation.

**Exercice 2** :

1) Déterminer la suite des premiers 3 itérations des méthodes de dichotomie dans l'intervalle [1 ; 3] et de Newton avec $x_0 = 2$ pour l'approximation du zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$
2) Soit g la fonction définie par $f(x) = e^{x^2} - 4x^2$
   a) Montrer que g admet quatre solutions dont on donnera les intervalles disjoints qui contiennent chacune de ces solutions.
   b) Soit la méthode de point fixe $\begin{cases} x_{k+1} = h(x) \\ x_0 \in ]0\,;1[ \end{cases}$ avec $h(x) = \frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2}$. Examiner la convergence de cette méthode. Donner-en trois itérations.

**Exercice 3** :

1) Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$
2) Résoudre en utilisant une séparation des variables les équations différentielles suivantes :
   a) $y' = \frac{4y}{x(y-3)}$
   b) $(x^2 - 1)y\,dx = x^2(1 - y)\,dy$

**Exercice 4** :

1) On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération :

| Temps t (en s) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Accélération a (en m/s²) | 30 | 31,63 | 33,47 | 35,47 | 37,75 | 40,33 | 43,29 | 46,70 | 5067 |

Calcule la vitesse V de la fusée à l'instant t = 80 s, par la méthode des trapèzes puis par Simpson.

2) Calculer $\int_1^2 \sqrt{x}\,dx$ par la formule des rectangles en décomposant l'intervalle d'intégration en dix parties. Evalue l'erreur commise.

REPUBLIQUE DU NIGER

ECOLE DES MINES, DE L'INDUSTRIE ET DE LA GEOLOGIE (EMIG)

NOM : Tidjani Boukari

PRENOM : Attaher

18/20

# FEUILLE D'EXAMEN

Numéro d'inscription du candidat

2. 

Epreuve de Analyse numérique

1. 

3. 

Ne rien inscrire dans les cases 2 et 3

Epreuve de Devoir de maison

Feuille N° 1

Ne rien inscrire dans la marge

## Exercice N°2 : TD1

$$(S)\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$$

1) Ecrivons le systeme (S) sous la forme $AX = B$.

On a : $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

En posant

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On a $AX = B$ correspond à (S).

2) Résolution de (S) par pivot de Gauss

| | |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 1 | 3 |
| 3 | -1 |
| 0 | -1 |

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 & L_1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 & L_2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 & L_3 \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 & L_4 \end{cases}$$

d'ou la matrice

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & -6 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}$$

$L_3' \leftarrow L_3' + 10L_2'$

$L_4' \leftarrow L_4' + L_2'$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 9 & 38 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1'' \\ L_2'' \\ L_3'' \\ L_4'' \end{array}$$

$L_4'' \leftarrow L_4'' - \frac{3}{11} L_3''$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 9 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{11} & -\frac{15}{11} \end{array}\right)$$

$$-\frac{5}{11} x_4 = -\frac{15}{11} \Rightarrow x_4 = 3$$

$$11x_3 + 9x_4 = 38 \Rightarrow x_3 = \frac{38 - 9x_4}{11}$$

$$x_3 = \frac{38 - 27}{11} = \frac{11}{11} = 1$$

Ne rien inscrire dans la marge

Le Candidat ne doit pas faire figurer son nom sur la copie

6

$x_2 + x_3 + x_4 = 3 \Rightarrow x_2 = 3 - x_3 - x_4$
$= \cancel{3} - 1 - \cancel{3} = -1$

$x_1 = 3x_2 - x_4 = \cancel{3} - \cancel{3} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 3 \end{cases} \qquad S_{\mathbb{R}^4} = \{(0,-1,1,3)\}$$

3) Décomposition LU de A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{pmatrix}$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

$$LU = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{22} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_{11} & & & \\ L_{21}U_{11} & L_{21}U_{12}U_{22} & L_{21}U_{13}+U_{23} & L_{21}U_{14}+U_{24} \\ L_{31}U_{11} & L_{31}U_{12}+L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13}+L_{32}U_{23}U_{33} & L_{31}U_{14}+L_{32}U_{24}+U_{34} \\ L_{41}U_{11} & L_{41}U_{12}+L_{42}U_{22} & L_{41}U_{13}+L_{42}U_{23}+L_{43}U_{33} & L_{41}U_{14}+L_{42}U_{24}+L_{43}U_{34}U_{44} \end{pmatrix}$$

$= A$ ; Par identification

$U_{11} = 2$ ; $U_{12} = 4$ ; $U_{13} = -2$ ; $U_{14} = 0$

$L_{21}U_{11} = 1$ ; $L_{21} = \frac{1}{2}$ ; $L_{21}U_{12} + U_{22} = 3 \Rightarrow U_{22} = 3 - L_{21}U_{12}$

$U_{22} = 3 - \left(\frac{1}{2} \times 4\right) = 3 - 2 = 1$ ; $U_{22} = 1$

$\cancel{L_{21} = \frac{1}{2}}$ $L_{21}U_{13} + U_{23} = 0 \Rightarrow U_{23} = -L_{21}U_{13} = -\frac{1}{2}(-2) = 1$

$U_{23} = 1$ ;

$L_{21}U_{14} + U_{24} = 1 \Rightarrow U_{24} = 1 - L_{21}U_{14} \Rightarrow U_{24} = 1$

$L_{31}U_{11} = 3 \Rightarrow L_{31} = \frac{3}{2}$ ;

⋮

Après calcul par identification

$L_{32} = -7$ ; $U_{33} = 11$ ; $U_{34} = 9$

$L_{41} = 0$ ; $L_{42} = -1$ ; $L_{43} = \frac{3}{11}$

$U_{44} = \frac{-5}{11}$

Ainsi $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3/11 & 1 \end{pmatrix}$ ; $U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{11} \end{pmatrix}$

$LU = A$

REPUBLIQUE DU NIGER

**ECOLE DES MINES, DE L'INDUSTRIE ET DE LA GEOLOGIE (EMIG)**

NOM : Tidjani Boukari

PRENOM : Attaher

# FEUILLE D'EXAMEN

Numéro d'inscription du candidat

2. Epreuve de Analyse numérique 1.

3. Feuille N° 2

Ne rien inscrire dans les cases 2 et 3

Epreuve de Devoir de maison

Ne rien inscrire dans la marge

Le système sera $LU = A$ ; or $AX = B \Rightarrow LUX = B$.
Si nous posons

$$\begin{cases} UX = Y & (1) \\ LY = B & (2) \end{cases} \quad \text{avec } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

On aura
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3/11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = -6 \\ \frac{1}{2} y_1 + y_2 = 0 \\ \frac{3}{2} y_1 - 7 y_2 + y_3 = 8 \\ -y_1 + \frac{3}{11} y_3 + y_4 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -6 \\ \frac{1}{2}(-6) + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 3 \\ \frac{3}{2}(-6) - 7(3) + y_3 = 8 \\ -9 - 21 + y_3 = 8 \Rightarrow y_3 = 38 \\ -3 + \frac{3}{11}(38) + y_4 = 6 \end{cases} ; \ y_4 = \frac{-15}{11}$$

$$UX = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 38 \\ -15/11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -6 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 11x_3 + 9x_4 = 38 \\ -\frac{5}{11}x_4 - \frac{15}{11} \end{cases}$$

On obtient le même système qu'à la question 2)

$$S_{\mathbb{R}^4} = \{(0,-1,1,3)\}$$

4) Solutions pour les valeurs de $B^T$ : $(1,2,3,4)$ ; $(0;-1;1,2)$.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow I_4X = A^{-1} \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_1 \\ L_4 \end{array}$$

On a :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 2 & -3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \leftarrow L_3' + 7L_2' \\ L_4 \leftarrow L_4' + L_2' \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 9 & -5 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1/2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1'' \\ L_2'' \\ L_3'' \\ L_4'' \leftarrow L_4'' - \frac{3}{11}L_3'' \end{array}$$

REPUBLIQUE DU NIGER

**ECOLE DES MINES, DE L'INDUSTRIE ET DE LA GEOLOGIE (EMIG)**

NOM : Tidjani Boukari

PRENOM : Attaher

# FEUILLE D'EXAMEN

Numéro d'inscription du candidat

2. 

Epreuve de Analyse numérique

1. 

3. 

Feuille N° 3

Ne rien inscrire dans les cases 2 et 3

Ne rien inscrire dans la marge

Epreuve de Devoir de maison

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 9 & -5 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{11} & 19/22 & -10/11 & -3/11 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} T_1 \\ T_2 \leftarrow T_2 + \frac{11}{5} T_4 \\ T_3 \leftarrow + \frac{99}{5} T_4 \\ T_4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7/5 & -1 & -3/5 & 11/5 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 121/10 & -11 & -22/5 & 99/5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{11} & 19/22 & -10/11 & -3/11 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} T_1' \leftarrow T_1' + \frac{2}{11} T_3' \\ T_2' \leftarrow T_2' - \frac{1}{11} T_3' \\ T_3' \\ T_4' \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 0 & 0 & 16/5 & -2 & -4/5 & 18/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/10 & 0 & -1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 121/10 & -11 & -22/5 & 99/5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{11} & 19/22 & -10/11 & -3/11 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} T_1'' \leftarrow T_1'' - 4 T_2 \\ T_2'' \\ T_3'' \\ T_4'' \end{array} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/10 & 0 & -1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 121/10 & -11 & -22/5 & 99/5 \\ 0 & 0 & 0 & -5/11 & 19/22 & -10/11 & -3/11 & 1 \end{array}\right)$$

Ne rien inscrire dans la marge

Le Candidat ne doit pas faire figurer son nom sur la copie



$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3/10 & 0 & -1/5 & 2/5 \\ 11/10 & -1 & -2/5 & 9/5 \\ -19/10 & 2 & 3/5 & -11/5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

* Pour $B^T = (1, 2, 3, 4)$.

<u>Donc</u>:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3/10 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 11/10 & -1 & -2/5 & 9/5 \\ -19/10 & 2 & 3/5 & -11/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13/10 \\ 51/10 \\ -49/10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{13}{10} \\ x_3 = \frac{51}{10} \\ x_4 = -\frac{49}{10} \end{cases}$$

d'où $S_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \left(3, \frac{13}{10}, \frac{51}{10}, \frac{-49}{10}\right) \right\}$

* Pour $B^T = (0, -1, 1, 2)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3/10 & 0 & -1/5 & 2/5 \\ 11/10 & -1 & -2/5 & 9/5 \\ -19/10 & 2 & 3/5 & -11/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/5 \\ 21/5 \\ -29/5 \end{pmatrix}$$

REPUBLIQUE DU NIGER

**ECOLE DES MINES, DE L'INDUSTRIE ET DE LA GEOLOGIE (EMIG)**

NOM : Tidjani Boukari

PRENOM : Attaher

# FEUILLE D'EXAMEN

Numéro d'inscription du candidat

2. 

Epreuve de Analyse numérique

1. 

3. 

Feuille N° 4

Ne rien inscrire dans la marge

Ne rien inscrire dans les cases 2 et 3

Epreuve de Devoir de maison

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{3}{5} \\ x_3 = 21/5 \\ x_4 = -29/5 \end{cases}$$

D'où $S_{\mathbb{R}^4} = \left\{\left(3, \frac{3}{5}, \frac{21}{5}, -\frac{29}{5}\right)\right\}$

5

## Exercice N°3 : TD2

1) Résolution

$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$$

Posons $Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

le système devient : $Y' = AY$

Calcul du polynôme caractéristique de A

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

Développement par rapport à la 2$^e$ colonne

$P_A(\lambda) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] + (\cancel{1}-\lambda+\cancel{1})$

$= (1-\lambda)\left[(\cancel{1}-\lambda-\cancel{1})(1-\lambda+1)\right] + (2-\lambda)$

$= -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) + (2-\lambda) = (2-\lambda)\left[-\lambda(1-\lambda)+1\right]$

$= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1) = (2-\lambda)\left(\lambda - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\lambda - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 2 \ ; \ \lambda_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \ ; \ \lambda_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

Les valeurs propres de A sont :

$\lambda_1 = 2 \ ; \ \lambda_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \ ; \ \lambda_3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

$E_{\lambda_1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (A - 2I_3)X = 0 \right\}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = x - x = 0 \end{cases}$ , $\forall x \in E_{\lambda_1}$ on a

$(x,y,z) = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1) = x V_1$

$E_{\lambda_1} = \text{Vect}\{V_1\}$

**ECOLE DES MINES, DE L'INDUSTRIE ET DE LA GEOLOGIE (EMIG)**

NOM : Tidjani Boukari

PRENOM : Attaher

# FEUILLE D'EXAMEN

Numéro d'inscription du candidat

2. 

Epreuve de Devoir de maison

1. 

Feuille N° 5

Ne rien inscrire dans la marge

3. 

Ne rien inscrire dans les cases 2 et 3

Epreuve de Analyse numérique

$$E_{\lambda_2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left(A - \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) I_3\right) X = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 \\ 1 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -1 & -1 & \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1-i\sqrt{3}}{2} x - z = 0 \\ x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} y + z = 0 \\ -x - y + \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3}) z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} x \\ y = -x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} z \\ y = -x + \frac{1}{4}(1-\sqrt{3}i)^2 x \end{cases}$$

$$y = -\left[1 - \frac{1}{4}\left(1 - 2\sqrt{3}\,i - 3\right)\right] x = -\left[1 - \frac{1}{4}\left(-2 - 2\sqrt{3}i\right)\right] x$$

$$= -\frac{1}{2}\left(3 + i\sqrt{3}\right) x$$

$$\forall (x,y,z) \in E_{\lambda_2},\ (x,y,z) = \left(x\ ; -\frac{1}{2}(3+i\sqrt{3})\ ; \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})x\right)$$

$$= x\left(1, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\ ; \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = x V_2$$

$$E_{\lambda_2} = \mathrm{Vect}\{V_2\}$$

$$E_{\lambda_3} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left(A - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) I_3\right) X = 0 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 \\ 1 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -1 & -1 & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{(1+i\sqrt{3})}{2} x - z = 0 \\ x + \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) y + z = 0 \\ -x - y + \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) x \\ y = -x + \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) z \\ y = -x + \frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})^2 x \end{cases}$$

$$y = x\left[-1 + \frac{1}{4}(1 + 2i\sqrt{3} - 3)\right]$$

$$= x\left[-1 + \frac{1}{4}(-2 + 2i\sqrt{3})\right] = x\left[-1 - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= x\left(\frac{-3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{3}) x$$

$$\forall (x,y,z) \in E_{\lambda_3} \Leftrightarrow (x,y,z) = x\left(1, -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} ; \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = x v_3$$

$$E_{\lambda_3} = \text{Vect}\{v_3\}$$

Puisque $P_A(\lambda)$ est

alors on aura :

$$Y = C_1 e^{\lambda t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + C_3 e^{\lambda_3 t} V_3 \quad (C_1, C_2, C_3 \text{ ctes})$$

$$Y = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + C_2 e^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)t}\begin{pmatrix}1\\ \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} + C_3 e^{\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)t}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} + C_2 e^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)t} + C_3 e^{t(1-i\sqrt{3})/2} \\ -\frac{1}{2}C_2(3+i\sqrt{3})e^{t(1+i\sqrt{3})/2} + \frac{1}{2}C_3(-3+i\sqrt{3})e^{\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)t} \\ -C_1 e^{2t} + \frac{1}{2}C_2(1-i\sqrt{3})e^{t\frac{(1+i\sqrt{3})}{2}} + \frac{1}{2}C_3(1+i\sqrt{3})e^{t\frac{(1-i\sqrt{3})}{2}} \end{pmatrix}$$

Les solutions $x$, $y$ et $z$ sont donc

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})t} + C_3 e^{\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})t} \\ y = -\frac{1}{2}C_2(3+i\sqrt{3})e^{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})t} + \frac{1}{2}C_3(-3+i\sqrt{3})e^{\frac{1}{2}t(1-i\sqrt{3})} \\ z = -C_1 e^{2t} + \frac{1}{2}C_2(1-i\sqrt{3})e^{\frac{1}{2}t(1+i\sqrt{3})} + \frac{1}{2}C_3(1+i\sqrt{3})e^{\frac{1}{2}t(1-i\sqrt{3})} \end{cases}$$

2) Résolution des ~~système~~ équations différentielles

a) $y' = \frac{4y}{x(y-3)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x(y-3)}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{y-3}{y}\right)\cdot dy = \frac{4}{x}\cdot dx \Leftrightarrow \int \frac{y-3}{y}\cdot dy = \int \frac{4}{x}\cdot dx$

$\Leftrightarrow \int\left(1-\frac{3}{y}\right)dy = 4\int\frac{1}{x}dx$

$\Leftrightarrow y - 3\ln y + = 4\ln x \Rightarrow \ln x = \frac{y}{4} - \frac{3}{4}\ln y + c$

$x = e^{1/4 y}\cdot e^{-3/4 \ln y}\cdot e^{c} \Leftrightarrow x = K y^{-3/4} e^{1/4 y}$

b) $(x^2-1)y \cdot dx = x^2(1-y) \cdot dy$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2} \cdot dx = \dfrac{1-y}{y} dy \Leftrightarrow \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)dx = \left(\dfrac{1}{y}-1\right)dy$

$\Leftrightarrow \int \left(1-\dfrac{1}{x^2}\right) \cdot dx = \int \left(\dfrac{1}{y}-1\right) \cdot dy$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = \ln y - y + C \Rightarrow \dfrac{x^2+1}{x} = \ln y - y + C$

Exercice N° 2 : TD 2

1) Suite des trois premières itérations par dichotomie et de Newton : $f(x) = x^2-2$

$f$ étant une fonction polynôme, elle est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - 2$ , $x_1 = 1$ ; $x_2 = 2$ $[1, 3]$

$f(1) = -1$ ; $f(3) = 7 \Rightarrow f(1) \cdot f(7) = -7 < 0$

$\theta \in [1, 3]$ ;

$x^{(1)} = \dfrac{1+3}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $f(2) = 2$

$f(1) \cdot f(2) = -1 \times 2 = -2 < 0 \Rightarrow \theta \in [1; 2]$.

$x^{(2)} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$

$f(1) \cdot f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow \theta \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$

$x^{(3)} = \dfrac{1+\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{5}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}$

* Méthode de Newton

La fonction $f$ est de classe $C^0$ et $f'(x) = 2x$

5

REPUBLIQUE DU NIGER

**ECOLE DES MINES, DE L'INDUSTRIE ET DE LA GEOLOGIE (EMIG)**

NOM : Tidjani Boukari

PRENOM : Attaher

# FEUILLE D'EXAMEN

Numéro d'inscription du candidat

2. | | |    Epreuve de Analyse numérique    1. | | |

3. | | |    Feuille N° 6

Ne rien inscrire dans les cases 2 et 3

Epreuve de Dev. de maison

Ne rien inscrire dans la marge

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

$$x_0 = 2 ; \quad x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} = 2 - \frac{4-2}{4} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} ; \quad x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 2}{2x_1} = \frac{3}{2} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}{\cancel{2} \times \frac{3}{\cancel{2}}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

$$x_2 = \frac{17}{12} ; \quad x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 2}{2x_2}$$

$$= \frac{17}{12} - \frac{(17/12)^2 - 2}{2\left(\frac{17}{12}\right)} = \frac{17}{12} - \left(\frac{1}{144} \times \frac{6}{17}\right) = \frac{577}{408}$$

2) $f(x) = e^{x^2} - 4x^2$ : Montrons que $g$ admet 4 solutions :

$$f'(x) = 2x e^{x^2} - 8x \Rightarrow f'(x) = 2x\left(e^{x^2} - 4\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } e^{x^2} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ ou } x^2 = \ln 4 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\ln 4} = 1{,}177 \\ x_2 = -\sqrt{\ln 4} = -1{,}177 \end{cases}$$

$f(-1{,}177) = \cancel{-2{,}99}$ $-1{,}545$ ; Puisque $f$ est pair

$f(x) = f(-x) \Rightarrow f(1{,}177) = -1{,}545$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d'où le tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $-1{,}177$ | | $0$ | | $1{,}177$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $e^{x^2}-4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1{,}545$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1{,}545$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times (f(-1{,}177)) < 0 \Rightarrow \exists\, x_1 \in ]-\infty, -1{,}177[$

$f(-1{,}177) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow \exists\, x_2 \in ]-1{,}177, 0[$

$f(0) \cdot f(1{,}177) < 0 \Rightarrow \exists\, x_3 \in ]0 ; 1{,}177[$

$f(1{,}177) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0 \Rightarrow \exists\, x_4 \in ]1{,}177 ; +\infty[$

d'où f admet 4 solutions

b) Méthode de point fixe $\begin{cases} x_{k+1} = h(x) \\ x_0 \in ]0;1[ \end{cases}$

$h(x) = \frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2}$. Examinons la convergence de cette méthode et donnons trois itérations

h est continue sur $]0,1[$

$h(0) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ ; $h(1) = \frac{\sqrt{e}}{2} = 0{,}824 \Rightarrow h(]0,1[) = ]\frac{1}{2};\frac{\sqrt{e}}{2}[$

; $h(]0,1[) = ]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{e}}{2}[ \subset ]0,1[$

Donc d'après le théorème du point fixe, notre itération proposée converge vers la solution de l'équation $x_{k+1} = h(x_k)$

Donnons-en trois itérations.

$\begin{cases} x_{k+1} = h(x) \\ x_0 \in ]0,1[ \end{cases}$ avec $h(x) = \frac{\sqrt{e^{x^2}}}{2}$

$x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{(e^{1/4})^{1/2}}{2} = \frac{e^{1/3}}{2} = 0{,}567$

$x_1 = 0{,}567 \Rightarrow x_2 = \frac{\left(e^{(0{,}567)^2}\right)^{1/2}}{2} = 0{,}587$

$x_2 = 0{,}587 \Rightarrow x_3 = \frac{e^{((0{,}587)^2)1/2}}{2} = 0{,}353.$