Contrôle : Devoir de maison n°1

Durée : ***à remettre dans une(1) semaine***

Exercice n^o1*(3,5 points)*

Un récepteur cellulaire présente trois sites A , B , C , de fixation d'un anticorps. Le site A a deux fois plus de chances d'être atteint par l'anticorps que le site B et le site B a deux fois plus de chances que le site C . Exprimer les probabilités que l'anticorps atteigne :

- Le site A
- Le site B
- Le site C

Exercice n^o2*(4,5 points)*

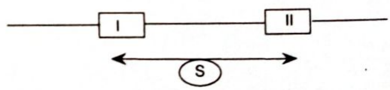
D'après le tableau suivant dans quels cas A et B sont-ils indépendants ?

cas	$\mathbb{P}(A)$	$\mathbb{P}(B)$	$\mathbb{P}(A \cup B)$
1	$0,1$	$0,9$	$0,91$
2	$0,4$	$0,6$	$0,76$
3	$0,5$	$0,3$	$0,73$

Justifiez votre réponse.

Exercice n^o3*(6 points)*

Un appareil se compose de deux composants I et II en série et d'un stabilisateur de tension S qui peut être en bon état ou défectueux. Avec un stabilisateur en bon état les fiabilités des ensembles I et II sont respectivement P_1 et P_2. Lorsque le stabilisateur est défectueux à $P_1' = P_1/2$ et $P_2' = P_2/2$. Le stabilisateur est en bon état avec une probabilité P_S.

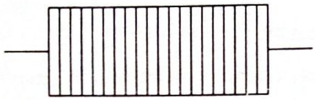


1. Trouver la fiabilité du système.
2. Quelle est cette fiabilité si les deux composants sont en parallèle ?

Exercice $n^o 4$ *(6 points)*

Un appareil se compose de trois ensembles E_1 , E_2 , E_3. E_1 est absolument nécessaire pour son fonctionnement, les deux autres doublent l'un l'autre. Les ensembles E_1 , E_2 , E_3, se composent respectivement de n_1 , n_2 , n_3 éléments. La défaillance ne serait-ce que d'un élément de E_i met E_i hors service($i = 1 , 2 , 3$).

Ensemble E_i



n_i éléments

On sait que l'appareil présente quatre défaillances dans quatre éléments différents des $n = n_1 + n_2 + n_3$ éléments de l'appareil. **Trouver la probabilité que ces quatre défaillances rendent impossible le fonctionnement de l'appareil.**
NB : *Chacune des défaillances apparait avec la même probabilité dans l'un quelconque des n éléments de l'appareil.*

Corrigé Devoir de maison : $n^o 1$

Exercice $n^o 1$ *(3,5 points)*

Exprimons les probabilités que l'anticorps atteigne : Les sites A , B , C . On a : $\mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(C)$ on en déduit :

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = \frac{7}{2}\mathbb{P}(B) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(B) = 2/7 \\ \mathbb{P}(A) = 4/7 \\ \mathbb{P}(C) = 1/7 \end{cases}$$

Exercice $n^o 2$ *(4,5 points)*

Les cas où A et B sont indépendants : A et B sont indépendants si et seulement si : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$$

cas	$\mathbb{P}(A)$	$\mathbb{P}(B)$	$\mathbb{P}(A \cup B)$	$\mathbb{P}(A \cap B)$	$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$
1	$0,1$	$0,9$	$0,91$	$0,09$	$0,09$
2	$0,4$	$0,6$	$0,76$	$0,24$	$0,24$
3	$0,5$	$0,3$	$0,73$	$0,07$	$0,15$

Dans les deux premiers cas A et B sont indépendants, et dans le derniers cas ils ne sont pas indépendants.

Exercice n°3 (6 points)

1. **La fiabilité** du système : $F = P_S P_1 P_2 + (1 - P_S)\frac{P_1}{2}\frac{P_2}{2}$
2. La **fiabilité** si les deux composants sont en parallèle :

$$P_S[1 - (1 - P_1)(1 - P_2)] + (1 - P_S)\left[1 - \left(1 - \frac{P_1}{2}\right)\left(1 - \frac{P_2}{2}\right)\right]$$

Exercice n°4 (6 points)

La probabilité que les quatre défaillances rendent impossible le fonctionnement de l'appareil : posons

$$\begin{aligned} A &= \text{"Fonctionnement impossible de l'appareil"} \\ A_1 &= \text{" } E_1 \text{ est tombé en panne "} \\ A_2 &= \text{" } E_1 \text{ n'est pas tombé en panne mais } E_2 \text{ et } E_3 \text{ y sont tombés"} \\ A_3 &= \text{" } E_2 \text{ et } E_3 \text{ sont tombés en panne"} \end{aligned}$$

Alors on $A = A_1 \cup A_2$ et $A_2 = \bar{A}_1 \cap A_3$ donc :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1) + (1 - \mathbb{P}(A_1))\mathbb{P}(A_3)$$

D'autre part on a :

$$\mathbb{P}(A_1) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}_1) = 1 - \frac{n - n_1}{n}\frac{n - n_1 - 1}{n - 1}\frac{n - n_1 - 2}{n - 2}\frac{n - n_1 - 3}{n - 3}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_3) &= C_4^1 \frac{n_2}{n_2 + n_3}\frac{n_3}{n_2 + n_3 - 1}\frac{n_3 - 1}{n_2 + n_3 - 2}\frac{n_3 - 2}{n_2 + n_3 - 3} + \\ &+ C_4^1 \frac{n_3}{n_2 + n_3}\frac{n_2}{n_2 + n_3 - 1}\frac{n_2 - 1}{n_2 + n_3 - 2}\frac{n_2 - 2}{n_2 + n_3 - 3} + \\ &+ C_4^2 \frac{n_2}{n_2 + n_3}\frac{n_2 - 1}{n_2 + n_3 - 1}\frac{n_3}{n_2 + n_3 - 2}\frac{n_3 - 1}{n_2 + n_3 - 3} \end{aligned}$$

En fait E_2 et E_3 tombent simultanément en panne sans que E_1 soit en panne, dans les cas suivants :

a) 1 défaillance dans E_2 et 3 défaillances dans E_3
b) 3 défaillances dans E_2 et 1 défaillance dans E_3
c) 2 défaillances dans E_2 et 2 défaillances dans E_3